ECUACIONES DIFERENCIALES

Autores

Ing. Martha E. Sevilla Abarca, PhD.

Ing. Pablo R. Valle Velasco, PhD.

EDITORIAL MMS PUBLICACIÓN SEMESTRAL DEL GRUPO EUP JUAN MONTALVO.

ISSN: *978-9942-7387-3-8*
Número 1: *agosto 2025*
Volumen: 1 *agosto 2025*
Editorial Digital: *© EUP Juan Montalvo*
Primera Edición: *2025*

Teléfonos: *(5932) 0994735813*
Correo electrónico: *mmseditorial@gmail.com*

ISBN: 978-9942-7387-3-8
9 789942 738738

ECUACIONES DIFERENCIALES

Ph.D. Martha Esperanza Sevilla Abarca
Universidad Técnica de Ambato
marthaesevilla@uta.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-3928-4085
Ecuador – Ambato

Ph.D. Pablo Raúl Valle Velasco
Universidad Técnica de Ambato
prvalle@uta.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-5047-2108
Ecuador - Ambato

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO

Las matemáticas un universo lleno de belleza abstracta, un juego lógico perfecto que permiten descubrir realidades externas más allá de lo físico y de lo real, que nos lleva a un resultado inesperado pero que al final tiene lógica. Las matemáticas un arte puro, un lenguaje oculto de realidad que nos lleva a volar la imaginación abstracta para obtener un resultado lógico. Las Ecuaciones diferenciales una de las ramas de las matemáticas aplicadas, que describe como una magnitud cambia en relación a otra, permitiendo modelar un sistema dinámico.

PhD. MARTHA ESPERANZA SEVILLA ABARCA

Obtuvo el titulo de Ingeniera Química en la Escuela Politecnica de Chimborazo, sus estudios de cuarto nivel lo realizo en la Universidad Técnica de Ambato obteniendo el titulo de Magister en Docencia Matematica, a continuación obtuvo el titulo de Doctora en Ingenieria en la Universidad del Valle (Cali – Colombia). Tiene un Curso de especialización en Docencia Matématica en Centro de Altos Estudios Uniniversitarios Centro de Altos Estudos Universitárarios en la Universidad de Oviedo. Curso en Cultura de la Investigación de Universidad Internacional de Rioja. Se a desempeñado como Docente de Química en la Facultad de ingeniería Civil y Mecanica de la universidad Técnica de Ambato, Como tutora de la senecyt en la carrera de Civil y Mecanica. Se a desempeñado como ayudante de catedra en la Carrera de Ingenieria en la Universidad del Valle, Actiualmente se desempeña como Docente - Investigador de la Facultad de Ingenieria en Sistemas, Electrónica e Industrial de Universidad Tecnica de Ambato.Pertenece al grupo de investigación de “Fisicoquímica de Bio y Nanomateriales” de la Universidad del Valle, actualmente es coordinadora del Grupo de Investigación de “Nanotecnología Aplicada” de la UTA. Los temas de interés en investigación son: Caracterización del material compuesto de resina poliester con partículas de caucho reciclado y su aplicabilidad en carrocerias, Método de funcionalización química para la obtención de óxido de grafeno adherido a la superficie de placas de grafito pirolítica de alta densidad por spray coating ácido, Impregnación de TiO_2-m preparado por el método sol-gel beneficiando la capa superficial de óxido de grafeno de alta densidad/grafito pirolítico, Análisis estadístico del uso del teléfono móvil en niños menores de edad y sus efectos, Mechanical characterization of biopolymer chitin-graphene, utilization of crustacean exoskeletons for the extraction and mechanical characterization of chitin for biomedical applications, Finite element modeling and simulation of the mechanical properties of chitin/graphene composite material and bone using ls-dyna software

PhD. Pablo Raúl Valle Velasco

El Dr. Pablo Raúl Valle Velasco es un destacado académico e ingeniero con una sólida y extensa trayectoria en la docencia universitaria y la investigación aplicada a la ingeniería. Formación Académica: Doctor en Ingeniería por la prestigiosa Universidad del Valle (Cali, Colombia). Magíster en Docencia Matemática por la Universidad Técnica de Ambato (UTA). Ingeniero Mecánico egresado de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH). Experiencia Docente:Posee una vasta experiencia docente superior a los 14 años, impartiendo conocimientos fundamentales y avanzados en matemáticas e ingeniería: Matemáticas Básicas y Avanzadas: Ha enseñado durante más de 14 años asignaturas troncales como Álgebra Superior, Geometría Plana, Geometría Analítica, Lógica Matemática y Trigonometría. Matemáticas Superiores: Cuenta con 9 años de experiencia en la enseñanza de Cálculo Diferencial e Integral, Ecuaciones Diferenciales y Series de Fourier. Posgrado: Ha sido profesor en el programa de Maestría en Diseño Mecánico, específicamente de la asignatura Diseño de Experimentos. Ingeniería Mecánica: Actualmente, como docente titular en la Carrera de Ingeniería Mecánica de la Universidad Técnica de Ambato (UTA), está encargado de las asignaturas avanzadas Análisis II (continuación natural de su experiencia en matemáticas superiores) y Resistencia de Materiales II, formando a las nuevas generaciones de ingenieros. Perfil Profesional: El Dr. Pablo Valle combina de manera excepcional su profundo conocimiento teórico-matemático, adquirido y perfeccionado a través de su Maestría en Docencia Matemática y años de experiencia enseñando disciplinas fundamentales, con su formación y visión práctica como Ingeniero Mecánico y Doctor en Ingeniería. Esta dualidad le permite abordar con solvencia tanto las asignaturas de ciencias básicas como las aplicadas al diseño y análisis en ingeniería mecánica, particularmente en áreas de análisis estructural y diseño experimental. Su compromiso con la excelencia académica y la formación de profesionales de alto nivel es una constante en su desempeño como docente e investigador en el ámbito de la ingeniería.

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE FIGURAS

DEDICATORIA

Este libro es dedicado, en primer lugar, a **Dios**, quien con sus bendiciones guio nuestro camino nos cuida y nos protege y nos cubre con su santo manto. **¡Gracias Dios!** Por tu guía y sabiduría en nuestras vidas, mi eterno agradecimiento. De igual manera, con todo mi amor, lo dedico a mis preciosas hijas, **Danna, Emily y Sofía**, quienes son mi mayor bendición y mi constante inspiración. Finalmente, a nuestros padres, por su inquebrantable fe en nosotros.

Prefacio

Este libro se ha creado como una herramienta fundamental para el curso de ecuaciones diferenciales en programas de ingeniería, reconociendo la importancia de esta disciplina en la modelación y resolución de problemas que surgen en diversos campos. A lo largo del texto, se han incorporado estrategias metodológicas diseñadas para facilitar el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, ofreciendo al estudiante una experiencia de estudio estructurada y progresiva.

El contenido del libro abarca desde ecuaciones diferenciales de primer orden con métodos de solución como la separación de variables y soluciones generales basadas en funciones primitivas hasta ecuaciones de orden superior. Cada capítulo presenta ejemplos detallados y problemas prácticos, acompañados de aplicaciones específicas para reforzar la comprensión teórica y la habilidad técnica del estudiante.

Este libro enfatiza los **métodos de resolución paso a paso** para ecuaciones diferenciales. Aprenderás a desarrollar soluciones utilizando herramientas esenciales como ecuaciones exactas, factores integrantes y cambios de variable, lo que te permitirá modelar fenómenos complejos en ingeniería. Además, se incluyen ejemplos de soluciones obtenidas con tecnología. Los ejemplos incluyen soluciones obtenidas mediante herramientas tecnológicas como: Wolfram Alpha y se presentan gráficos generados por software para ilustrar visualmente los resultados.

El libro también explora aplicaciones de operadores lineales y ofrece una guía accesible para su comprensión mediante ejercicios prácticos. Se abordan ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes y variables; incluyendo la ecuación de Riccati y se presentan métodos para resolver ecuaciones como la de Bernoulli, siguiendo un orden lógico que facilita el aprendizaje progresivo.

Con esta estructura y los recursos proporcionados se espera que el lector desarrolle una comprensión profunda y práctica de las ecuaciones diferenciales, fortaleciendo las habilidades necesarias para enfrentar problemas de modelación en el ámbito de la ingeniería.

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales son herramientas matemáticas poderosas que se utilizan para describir y modelar una amplia variedad de fenómenos en ciencias naturales, ingeniería y otras disciplinas. Estas ecuaciones expresan relaciones entre una función desconocida y sus derivadas, lo que permite comprender y predecir cómo cambia una cantidad en función de sus tasas de cambio.

Un ejemplo clásico de ecuación diferencial es la ecuación del crecimiento exponencial. Supongamos que tenemos una población de bacterias que se duplica cada hora. Si denotamos la población en un momento dado como $P(t)$, donde "t" es el tiempo; la ecuación diferencial se escribe como $dP/dt = kP$, donde k es una constante que representa la tasa de crecimiento. Esta ecuación establece que la tasa de cambio de la población es proporcional a la población actual. Resolver esta ecuación permite predecir la evolución de la población bacteriana en el tiempo.

Otro ejemplo común es la ecuación del movimiento armónico simple (MAS). Supongamos que tenemos un objeto que oscila en un resorte. La posición del objeto en función del tiempo se puede describir mediante una ecuación diferencial $d^2x/dt^2 + kx = 0$, donde x es la posición y k es una constante relacionada con la rigidez del resorte. Esta ecuación establece que la aceleración del objeto es proporcional y opuesta a su posición. Resolver esta ecuación nos permite determinar la posición del objeto en cualquier momento dado.

Las ecuaciones diferenciales son herramientas esenciales en diversas disciplinas. En **física**, describen el movimiento de partículas bajo la influencia de fuerzas, como la ley de gravitación universal. Para la **ingeniería**, son fundamentales en la modelación de la transferencia de calor en materiales y el comportamiento de circuitos eléctricos. Asimismo, en **biología**, se aplican para analizar el crecimiento y la dinámica de poblaciones. La resolución de ecuaciones diferenciales implica encontrar una función que satisface la ecuación dada. Esto puede lograrse mediante métodos analíticos o numéricos, dependiendo de la complejidad de la ecuación y del problema específico. Los métodos analíticos implican encontrar soluciones exactas utilizando técnicas algebraicas y de cálculo; mientras que los métodos numéricos se basan en aproximaciones numéricas para obtener soluciones aproximadas.

En resumen, las ecuaciones diferenciales son herramientas matemáticas esenciales para describir el cambio y el comportamiento de diversas cantidades en función de sus tasas de cambio. A través de ejemplos como el crecimiento exponencial y el movimiento armónico simple, podemos apreciar cómo estas ecuaciones permiten comprender y predecir fenómenos en una amplia gama de disciplinas científicas y tecnológicas.

CAPITULO I

ECUACIONES DIFERENCIALES

Una ecuación diferencial es una ecuación matemática que relaciona una función desconocida con una o más de sus derivadas. En otras palabras, una ecuación diferencial establece una relación entre una función y sus derivadas respecto a una o más variables independientes[1]. La ecuación diferencial agrupa relaciones independientes, variables, funciones desconocidas y derivadas de la función.

Estas ecuaciones diferenciales se dividen en dos grupos:

- **Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO):** son las que contienen una variable independiente y sus derivadas. Utilizadas para modelar sistemas en los que un cambio en la cantidad depende de una variable.
- **Ecuaciones diferenciales parciales (PDE):** Estas ecuaciones involucran dos o más variables independientes y sus derivadas parciales, y se emplean para representar fenómenos que dependen de múltiples variables, como la temperatura en tres dimensiones o la dinámica de fluidos.
  Suponiendo que la ecuación diferencial de forma general se expresa como una función de orden $f(x, y, y', y'', \dots \dots \dots .. y^n) = 0$, esta forma es muy común en matemáticas, física, ingeniería y muchos otros campos. Se utilizan para modelar una amplia variedad de sistemas dinámicos y fenómenos que involucran tasas de cambio. Entonces la ecuación diferencial de orden uno tiene una función de la forma $f(x, y, y') = 0 \quad o \quad y' = f(x, y,)$[2], esta expresión representa una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, donde y es la variable dependiente, x es la variable independiente, y' es la derivada de y con respecto a x, y $f(x, y,)$ es una función que define la tasa de cambio de y con respecto a x [3][4]. Por tanto, una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación diferencial que relaciona una función desconocida con sus derivadas ordinarias con respecto a una variable independiente única [5] [6] ejemplo:

$$y' + xy = sen\, x$$

$$y' + 2xy = 7$$

A continuación, se muestra un ejemplo de ecuaciones con derivadas parciales que incluyen variables independientes y que involucran una o más variables desconocidas.

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y \qquad\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

1.1 Orden y grado de una ecuación diferencial

1.1.1 Orden de una ecuación diferencial

El orden de una ecuación diferencial se refiere al orden más alto de la derivada presente en la ecuación. En otras palabras, el orden de una ecuación diferencial es el número más alto al que se aplica la derivada en la ecuación [4].
Por ejemplo, considerando la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = 0$$

En esta ecuación, la derivada de tercer orden $\frac{d^3y}{dx^3}$ es el término de derivada más alto. Por lo tanto, el orden de esta ecuación diferencial es tercer orden.

1.1.2 Grado de una ecuación diferencial

El grado de una ecuación diferencial es el exponente más alto al que se eleva la derivada de mayor categoría en la ecuación después de que se hayan realizado todas las simplificaciones y reorganizaciones.
Por ejemplo, si se tiene la siguiente ecuación diferencial.

$$\left(y^{vii}\right)^4 + y^{viii} - y' = 0$$

En esta ecuación diferencial se considera que el máximo orden de esta ecuación diferencial que es 8 y la potencia a la que esta elevado este término que es 1, por lo tanto, su grado es 1[4].

En la siguiente Tabla 1, se muestra información sobre diferentes ecuaciones diferenciales en términos de sus derivadas, funciones involucradas y el tipo de ecuación según su orden y grado.

Tabla 1. *Descripción del orden y grado de una ecuación diferencial*

	Primera derivada	***Segunda derivada***	***Tercera derivada***	***Función***	***Tipo de ecuación***
$\frac{dy}{dx} + 2xy = 5$	$\frac{dy}{dx}$	-	-	$(2x)y$	Primer orden y grado
$\frac{dy}{dx} + y = 3$	$\frac{dy}{dx}$	-	-	y	Primer orden y grado
$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 10$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	-	y	Segundo orden y primer grado
$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} + 5y = n$	$\frac{dy}{dx}$	$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$	-	$5y$	Segundo orden y grado

Para analizar la comprensión de los conceptos detallados en los párrafos anteriores se revisará los siguientes ejemplos de ecuaciones diferenciales que ilustran la clasificación según su orden y grado. Cada ejemplo destaca un caso particular en el que el análisis de los términos derivados y su grado permite comprender la complejidad de las soluciones necesarias y los métodos de resolución adecuados. Para cada ecuación, se analizará el orden (determinado por la derivada de mayor orden) y el grado (determinado por el exponente de esa derivada de mayor orden) para entender mejor cómo estos factores influyen en su tratamiento.

Ejercicio 1.1

$$\frac{d^7y}{dx^7} + 2\frac{d^6y}{dx^6} + 3sen\,x = 0$$

Identificar el orden:

La derivada de mayor orden en esta ecuación es $\frac{d^7y}{dx^7}$, que corresponde al séptimo orden.

Identificar el grado:

En este caso, todas las derivadas aparecen en forma explícita y sin potencias, lo que indica que el grado de la derivada de mayor orden ($\frac{d^7y}{dx^7}$) es uno.

$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + y = 0$ Orden dos, grado uno

$x^4(x^2+y^2)dx + xy\,dy = 0$ Orden uno, grado uno

$(y''')^2 + (y'')^3 + y' = x^2 + x$ Orden tres, grado dos

1.2 Solución General de la Ecuación Diferencial Ordinaria

La solución general de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) representa el conjunto completo de todas las soluciones posibles de la ecuación. La forma de esta solución depende del tipo de EDO y de sus coeficientes. Una función $f(x)$ se considera solución de una ecuación diferencial dada, si al sustituir $f(x)$ y sus derivadas en la ecuación esta se satisface de manera consistente.

Nota: Una relación general de la forma $\delta\,(x, y, c_1) = 0$ se considera una solución general de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en el dominio de la solución I, si al sustituir y y y'en la ecuación $y' = f(x, y)$ se obtiene una identidad. Esta identidad garantiza que la relación propuesta incluye todas las soluciones posibles dentro del intervalo considerado.

Una ecuación diferencial con una solución general, expresada en términos de 'x' e 'y', se verifica como solución dependiendo del procedimiento y del número de veces que la ecuación diferencial muestre su grado correspondiente. de esta manera realizando las sustituciones correspondientes se pueda comprobar la identidad, por tanto, la solución general de la ecuación general está definida por la identidad. Este tipo de procedimiento indica cuantas veces una función debe ser derivable.

Los siguientes ejemplos muestran una secuencia de derivadas para verificar una solución general particular.

Ejercicio 1.2.1

Verificar si la ecuación primitiva, $y = c\,e^{-x} + \frac{1}{3}\,e^x$ es solucion de la ecuación diferencial, $y' + 2y = e^x$. Para conseguir la solución se debe derivar la ecuación diferencial primitiva cuantas veces indica el mayor grado de la ecuación diferencial , para este caso la ecuación primitiva se debe derivar una sola vez, después, sustituir en la ecuación diferencial los valores de y' e y

Solución:

Se deriva y:

$$y' = c\,\frac{d}{dx}(e^{-x}) + \frac{1}{3}\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$y' = ce^{-x}\frac{d}{dx}(-x) + \frac{1}{3}e^{x}\frac{d}{dx}(x)$$

$$y' = -ce^{-x} + \frac{1}{3}e^{x}$$

Se reemplaza y' en la EDO y se obtiene:

$$-ce^{-x} + \frac{1}{3}e^{x} + 2\left(ce^{-x} + \frac{1}{3}e^{x}\right) = e^{x}$$

$$ce^{-x} + e^{x} = e^{x}$$

Evaluando la solución se puede observar que No es una solución porque no tiene identidad.

Ejercicio 1.2.2

Verificar que la ecuación primitiva $y = ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x}$ es solución general de la ecuación diferencial ordinaria $y' + 2y = e^{x}$

Se deriva y :

$$y' = c\frac{d}{dx}(e^{-2x}) + \frac{1}{3}\frac{d}{dx}e^{x}$$

$$y' = ce^{-2x}\frac{d}{dx}(-2x) + \frac{1}{3}e^{x}$$

$$y' = -2ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x}$$

Se reemplaza y' en la EDO y se obtiene:

$$-2ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x} + 2\left(ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x}\right) = e^{x}$$

$$-2ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x} + 2\left(ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x}\right) = e^{x}$$

$$-\cancel{2ce^{-2x}}+\frac{1}{3}e^{x}+2ce^{-2x}+\cancel{2.\frac{1}{3}e^{x}}=e^{x}$$

$$e^{x}=e^{x}$$

Como la expresión final representa una identidad, esta condición es solución de la ecuación diferencial.

Ejercicio 1.2.3

Resuelva la ecuación diferencial de segundo orden $y''-4y'=0$ .Encuentre la solución de la ecuación diferencial que satisface la condición.

$$y=e^{2x}(c_1\cos 2x+c_2 sen\ 2x)$$

Se deriva y :

$$y'=e^{2x}\left[\frac{d}{dx}(c_1cos2x)+\frac{d}{dx}(c_2sen\ 2x)\right]+[c_1cos2x+c_2sen2x]\frac{d}{dx}(e^{2x})$$

$$y'=e^{2x}(-c_1sen\ 2x.2+c_2cos2x.2)+(c_1\cos 2x+c_2sen\ 2x)2e^{2x}$$

$$y'=-2e^{2x}(c_1sen\ 2x-c_2\cos 2x)+2y$$

Se deriva y' :

$$y''=-4e^{2x}(c_1cos\ 2x+c_2\ \mathrm{sen}\ 2x)+2(2c_1sen2x-2c_2\cos 2x)e^{2x}+2y'$$

$$y''=4y+(2y'-4y)+2y'$$

$$4y'-4y'=0$$

$$0=0$$

Esta condición representa la solución de la ecuación diferencial correspondiente.

La solución verifica que, y es la solución general de la ecuación diferencial ordinaria dada, obteniendo una identidad. Estos ejemplos se han desarrollado con el propósito de ejemplificar la matemática aplicada a los teoremas del cálculo diferencial utilizando la estructura de una ecuación diferencial ordinaria.

1.3 Aplicaciones de las EDO en Ingeniería

Ejercicio 1.3.1

Problema: Perfil Aerodinámico Optimizado

En el diseño de un nuevo perfil alar para una aeronave de alta eficiencia, se requiere determinar una curva que pase por el punto (1, 3) de modo que el coeficiente angular de la tangente en cualquier punto de la curva sea igual a la mitad de la ordenada del mismo punto, disminuida en una unidad. Esta relación se utiliza para optimizar la distribución de presiones a lo largo del perfil alar. Formule la ecuación diferencial que describe esta curva y resuélvala.

Solución:

El coeficiente angular de la tangente en cualquier punto de la curva está dado por $\frac{dy}{dx}$, Según las condiciones del problema, se pude escribir:

$$\frac{dy}{dx} = (\frac{1}{2})y - 1$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden. Para resolverla, se usa el método de variables separables:

$$\frac{dy}{((\frac{1}{2})y - 1)} = dx$$

Integrando ambos lados:

$$\int \frac{dy}{((\frac{1}{2})y - 1)} = \int dx$$

$$2\, ln|(\frac{1}{2})y - 1| = x + C$$

Despejando y:

$$y = 2(e^{((x+C)/2)} + 1)$$

Para determinar la constante C, se usa la condición inicial $(1, 3)$:

$$3 = 2(e^{((x+C)/2)} + 1)$$

$$e^{((x+C)/2)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(1+C)}{2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$C = 2ln(\frac{1}{2}) - 1$$

Sustituyendo este valor de C, en la ecuación general:

$$y = 2(e^{((x+2ln(1/2)-1)/2)} + 1)$$

Esta ecuación representa la curva del perfil alar optimizado que satisface las condiciones dadas.

Ejercicio 1.3.2

Problema: **Trayectoria de Mínima Resistencia para un Vehículo Autónomo**

En el diseño de la trayectoria para un vehículo autónomo se busca una curva que pase por el punto (-1, 1) de manera que esta trayectoria en cualquier punto sea proporcional a la distancia de ese punto al eje y. La constante de proporcionalidad es 2. Esta relación se utiliza para minimizar la resistencia del aire durante el movimiento del vehículo.

Determine la ecuación diferencial que describe esta curva y resuélvala.

Solución:

La curvatura en coordenadas cartesianas está dada por:

$$\kappa = |y''| / (1 + (y')^2)^{(3/2)}$$

Según las condiciones del problema:

$$|y''| / (1 + (y')^2)^{(3/2)} = 2|x|$$

Asumiendo que y'' es positiva (la curva es cóncava hacia arriba), se puede escribir que:

$$y'' = 2|x|\,(1 + (y')^2)^{(3/2)}$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden no lineal. Debido a su complejidad se resuelve para $x \geq 0$ y se extiende la solución para $x < 0$ por simetría.

Para $x \geq 0$:

$$y'' = 2x(1 + (y')^2)^{(3/2)}$$

Se realiza la sustitución $p = y'$, entonces $y'' = dp/dx$:

$$dp/dx = 2x(1 + p^2)^{(3/2)}$$

Separando variables:

$$dp\,/\,(1 + p^2)^{(3/2)} = 2x\,dx$$

Al integrar ambos lados y aplicar la sustitución trigonométrica, se obtiene

$$p = tan\,\theta$$

$$dp = sec^2\,\theta\,d\theta$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$sec^2\,\theta\,d\theta\,/\,(1 + tan^2\,\theta)^{(3/2)} = 2x\,dx$$

Simplificando, recordando que $1 + tan^2\,\theta = sec^2\,\theta$:

$$sec^2\,\theta\;\;d\theta\,/\,(sec^2\,\theta\,)^{(3/2)} = 2x\,dx$$

$$d\theta\,/\,sec\,\theta = 2x\,dx$$

Integrando ambos lados:

$$\int d\theta \,/\, sec\, \theta \;=\; \int\; 2x\, dx$$

$$sin\, \theta \;=\; x^2 \;+\; C$$

Revirtiendo la sustitución, recordando que $sin\, \theta \;=\; p \,/\, \sqrt{(1 \;+\; p^2)}$:

$$p \,/\, \sqrt{(1 \;+\; p^2)} \;=\; x^2 \;\; + \; C$$

$$-1 \,/\, \sqrt{(1 \;+\; p^2)} \;=\; x^2 \;+\; C$$

Despejando p:

$$p \;=\; y' \;=\; \pm\sqrt{((1 \,/\, (x^2 \;+\; C)^2) \;-\; 1)}$$

El signo negativo permite satisfacer la condición inicial. Integrando nuevamente se obtiene:

$$y \;=\; -\int \sqrt{((1 \,/\, (x^2 \;+\; C)^2) \;-\; 1)}\, dx \;+\; D$$

Esta integral representa la ecuación de la curva buscada. Las constantes C y D se pueden determinar usando la condición inicial $(-1, 1)$ y la simetría de la curva.

Ejercicio 1.3.3

Hallar la curva para la cual el área R, limitada por la curva, el eje OX y las dos ordenadas $x \;=\; 0, x \;=\; x$, sea una función dada de Y.

$$R \;=\; b^3 arctan(\frac{y}{b})$$

Para este ejemplo utilizaremos Wólfram (Lenguaje Mathematica) para resolución de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden (EDO)

Para trabajar ecuaciones diferenciales en el programa Wólfram se considera las variables de dependencia simple de una o más variables dependientes.

DSolve permite resolver un sistema de ecuaciones de diferentes tipos, sean lineales o de varias incógnitas.

DSolve => encuentra soluciones simbólicas

Sintaxis en Wólfram

DSolve [ecuación, y[x], x]

1. y’ = 2x

$$\text{DSolve}[y'[x] == 2x, y[x], x]$$

$$\{\{y[x] \to x^2 + C_1\}\}$$

2.- y’= 2x^3

$$\text{DSolve}[y'[x] == 2x\char`^3, y[x], x]$$

$$\{\{y[x] \to \frac{x^4}{2} + C_1\}\} \quad ,$$

$$y' = \frac{3y+6}{x+1}$$

$$\text{DSolve}[y'[x] == \frac{3y[x]+5}{x+1}, y[x], x]$$

$$\{\{y[x] \to -\frac{5}{3} + (1+x)^3 \quad {}_1\}\}$$

3.- y’= 3x+ 5y

$$\text{DSolve}[y'[x] == 3x + 5y[x], y, x]$$

$$Y(y) = c_1 + 3\,x\,y + \frac{5\,y^2}{2}$$

4.- y’ = Sen + Cos y

$$\mathrm{DSolve}[y'[x] == \mathrm{Senx} + \mathrm{Cosy}[x], y[x], x]$$

$$\{\{y[x] \to -\frac{\mathrm{Senx}}{\mathrm{Cos}} + e^{\mathrm{Cos}x} \quad {}_1\}$$

Para determinar los puntos de equilibrio de:

$$\frac{dx}{dt} = x(5 - x - 3y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(2 - 2x - y)$$

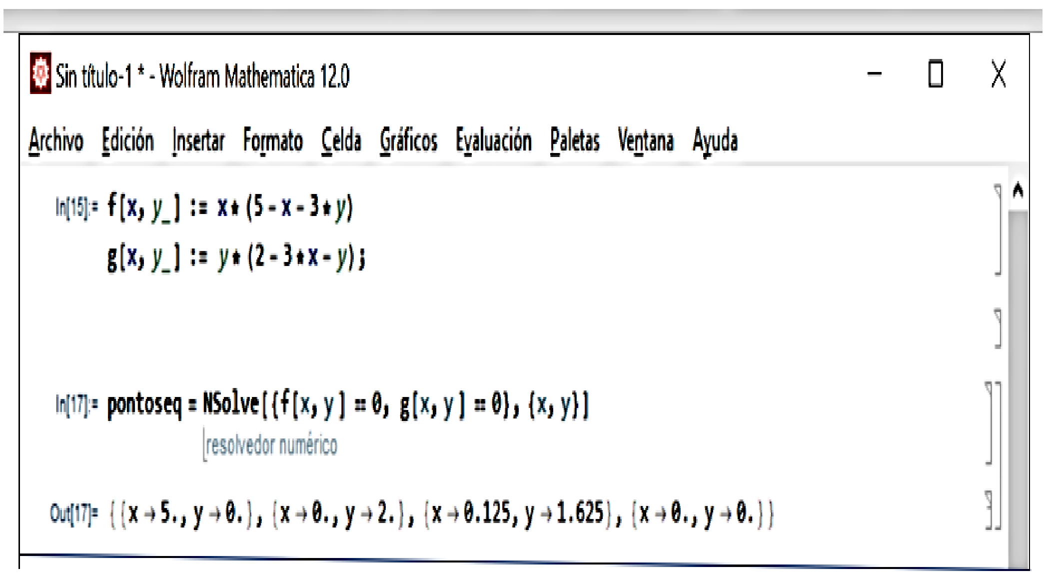
5.- y’= $\frac{3y+5}{x+1}$

$$\mathrm{DSolve}[y'[x] = \frac{3y[x] + 5}{x + 1}, y[x], x]$$

$$\{\{y[x] \to 3x + 2x^2 + c_1\}\}$$

En la Figura 1, se presenta el resultado obtenido en el Wólfram Mathematica

Figura 1. Resultados obtenidos de la ecuación diferencial por Wólfram (lenguaje Mathematica)



Ejercicios Propuestos sección 1.

Resolver los siguientes ejercicios:

1.- $y' = 2x$ Resp.: $y(x) = \frac{2x^2}{2} + c$

2.- $y' = 3xy$ Resp: $y(x) = C_1 e^{\frac{3}{2}x^2}$

3.- $y' = 5x^2 y$ Resp: $y(x) = C_1 e^{\frac{5}{3}x^3}$

4.- $y' = 4x^2 + 2$ Resp: $y(x) = \frac{4x^3}{3} + 2x + c$

5.- $y' = 3x^3 + 2x^2 + 5x + 1$ Resp: $y(x) = \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + x + c$

6.- $y' = 2x^4 + 3$ Resp: $y(x) = \frac{2x^4}{5} + 3x + c +$

7.- $y' = (x^2 + 1)y$ Resp: $y(x) = e^{\frac{x^3}{3}} e^x + c$

8.- $y' = (x + 1)^2$ Resp: $y(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + c$

9.- $y' = senx + cosx$ Resp: $y(x) = \cos x - \operatorname{sen} x + c$

10.- $y' = \frac{x+1}{2x-1}$ Rep.: $y(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \log(2x - 1) + c$

11.- $y' = x^2 \sqrt{1 - x^2}$ Rep.: $y(x) = \frac{1}{8} sen^{-1}x - \frac{1}{8}\sqrt{1 - x^2}\, x + \frac{1}{4}\sqrt{1 - x^2}x^3 + c$

1.3 Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Las ecuaciones diferenciales de primer orden se pueden expresar de varias formas, dependiendo de su tipo $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$; una función del tipo $y = u(x, c)$ considerada como solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ donde y es la función desconocida y $f(x, y)$ es una función dada que describe la relación entre "x" y "y", la derivada $y' = \frac{dy}{dx}$. Las ecuaciones diferenciales de primer orden son ecuaciones que relacionan una función desconocida con sus derivadas de primer orden[10] [11].

Existen diversos métodos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. La elección del método adecuado depende de la forma específica de la ecuación y de las propiedades que ésta posea. Algunos de los métodos más comunes incluyen:

- Ecuaciones separables: Se aplican cuando los términos que involucran la variable dependiente y su derivada pueden separarse en lados opuestos de la ecuación.
- Ecuaciones lineales: Estas tienen la forma estándar $y' + P(x)y = Q(x)$ y pueden resolverse usando un factor integrante.
- Ecuaciones exactas: Se emplean cuando la ecuación puede expresarse en términos diferenciales exactos, es decir cuando existe una función potencial $F(x, y)$ tal que $dF = 0$.
- Ecuaciones homogéneas: Se utilizan si la ecuación es homogénea, lo que permite realizar un cambio de variables para simplificarla.
- Métodos especiales (como Bernoulli o Riccati): Son útiles para ecuaciones que poseen estructuras específicas.

Ecuaciones diferenciales resueltas por el método de variables separables

En primer lugar, si se tiene una ecuación diferencial del tipo $M(x, y)dx + N(x, y)\, dy = 0$ (A) es de variables separables si las funciones M y N se pueden expresar como producto de dos funciones que contienen "x" y "y", tal como se muestra en el sistema siguiente [8].

$$\left.\begin{aligned} M(x, y) &= g_1(x)h_1(y) \\ N(x, y) &= g_2(x)h_2(y) \end{aligned}\right\} \quad 1$$

Remplazando (1) en (A) se obtiene:

$$g_1(x)h_1(y)\,dx + g_2(x)h_2(y)dy = 0 \quad (\mathbf{2})$$

La expresión (2) se divide para $h_1(y)\ g_2(x)$ y se obtiene la ecuación resultante:

$$\frac{g_1\ (x)}{g_2(x)}dx + \frac{h_2(y)}{h_1(y)}\ dy = 0$$

$$g(x)\ dx + h(y)\ dy = 0 \qquad (\mathbf{3})$$

Se obtiene la ecuación diferencial (3) estas funciones están en función de "y" y "x" respectivamente[12].

Solución:

1. Se transforma $M\ y\ N$ en un producto de dos funciones que contienen "x" y "y" separándolas en dos factores, donde un factor contenga solo la variable y; mientras el otro factor solo la variable x.
2. Para obtener una expresión en términos de "x" y "y" en una ecuación correspondiente en $g(x)\ dx\ e\ h(y)\ dy$, es común dividir para los factores ordenados de $M\ y\ N$

3. Se integra ambos lados y se resuelve

Ejercicio 1.3

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(xy^2 - x)\ dx + (yx^2 - y)\ dy = 0 \quad \textbf{(A)}$$

$$Mdx + Ndy = 0$$

Es indiscutible que si la derivada de una constante es cero, se puede aplicar la siguiente ecuación: $\frac{d(c)}{dx}$

$$\left.\begin{aligned} M &= xy^2 - x = x(y^2 - 1) \\ N &= yx^2 - y = y(x^2 - 1) \end{aligned}\right\} 1$$

(A) se divide por $(y^2 - 1)\ (x^2 - 1)$:

$$x(y^2 - 1)\ dx + y\ (x^2 - 1)\ dy = 0 \quad (\mathbf{A})$$

$$\frac{xdx}{x^2-1} + \frac{y}{y^2-1}dy = 0 \quad (\mathbf{2})$$

Integrando se tiene:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2 - 1} + \frac{1}{2}\int \frac{2ydy}{y^2 - 1} = \int dc$$

$$ln|x^2 - 1||y^2 - 1| = 2lnc$$

$$\cancel{ln}|x^2 - 1||y^2 - 1| = \cancel{ln}c^2$$

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = k$$

Si se considera que $y' = \frac{dy}{dx}$ y logrando despejar los diferenciales se consigue la separación de las variables "x" y "y" con su respectivo diferencial, es decir dx con la variable x y dy con la variable y.

Ejercicio 1.3.1

Resolver la ecuación diferencial

$$\boldsymbol{e^{-y}(1+y')=1}$$

$$e^{-y}+e^{-y}y'=1$$

$$e^{-y}dx+e^{y}dy=1dx$$

$$e^{-y}dx-dx=-e^{-y}dy$$

$$e^{-y}dy=(1-e^{-y})dx$$

$$\frac{e^{-y}dy}{1-e^{-y}}=dx$$

la derivada:

$$d(1-e^{-y})=e^{-y}$$

Entonces se integra aplicando la fórmula:

$$\int\frac{d[f(x)]}{f(x)}=ln|f(x)|$$

$$\int\frac{e^{-y}dy}{1-e^{-y}}=\int dx+c$$

$$ln|1-e^{-y}|=x+ln.c$$

$$ln\left|\frac{1-e^{-y}}{c}\right| = x$$

$$\frac{1-e^{-y}}{c} = e^{x}$$

$$1 - e^{-y} = ce^{x}$$

Ejercicio 1.3.2

Encontrar la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$x(y^2 - 2y + 2)\, dx + y\,(x^2 + 2x + 1)\, dy = 0 \qquad \textbf{(A)}$$

$$\frac{xdx}{x^2+2x+1} + \frac{ydy}{y^2-2x+2} = 0$$

$$\frac{xdx}{(x+1)^2} + \frac{ydy}{y^2-2x+1+1} = 0$$

$$\frac{xdx}{(x+1)^2} + \frac{ydy}{(y-1)^2+1} = 0 \qquad \textbf{(B)}$$

Cuando no se dispone de una fórmula de integración directa, se aplican **sustituciones estratégicas** para transformar la expresión en una forma integrable.

(C)

$$\begin{cases} u = x + 1 & x = u - 1 & dx = du \\ v = y - 1 & y = v + 1 & dy = dv \end{cases}$$

Efectuando un cambio de variables

Se reemplaza (C) en (B) y se tiene:

$$\frac{u-1}{u^2}du \quad + \quad \frac{v+1}{v^2+1}dv = 0$$

$$\frac{du}{u} - \frac{du}{u^2} + \frac{vdv}{v^2+1} \quad + \quad \frac{dv}{v^2+1} = 0$$

$$\int \frac{du}{u} - \int u^{-2}du + \frac{1}{2}\int \frac{2vdv}{v^2+1} + \int \frac{dv}{v^2+1} = c$$

$$ln|u| - \frac{u^{-1}}{-1} + \frac{1}{2}ln|v^2+1| + arc\tan v = lnc$$

$$ln\left|u\left(\frac{v^2+1}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\right| = -\left(\frac{1}{u} + arc\tan v\right)$$

$$u(v^2+1)^{\frac{1}{2}} = Ce^{-\left(\frac{1}{u}+arctanv\right)}$$

Realizando el remplazo de las variables primitivas se tiene:

$$(x+1)(y^2-2y+2)^{\frac{1}{2}} = ce^{-\left(\frac{1}{x+1}+arctan(y-1)\right)}$$

Ejercicios Propuestos de la Sección 1.3
Resolver los siguientes ejercicios

1.- $(2xy)dx + (x^2 - 1)\,dy = 0$ Resp: $y(x) = \frac{c}{x^2-1}$

2.- $(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy - y)\,dy = 0$ Resp: $y(x) = \frac{x^2}{1-2x} + \frac{i\sqrt{-\frac{2x-1}{1-2x}}\sqrt{\frac{(2x-1)(1-2x)}{2x-1}}}{2x-1}$

3.- $(3xy + 2y^2)dx + (x^2 + 4xy - y^2)dy = 0$ Resp: $y(x) = Ce^{-\int \frac{(x^2+4xy-y^2)dy}{x^2+4xy-y^2}}$

4.- $(e^x(y^2+1))\,dx + \big(2y(x^2-6)\big)dy = 0$ Resp: $y(x) = Ce^{\int \frac{(y^2+1)e^x}{x^2-6}dx}$

5.- $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1+x^2}$ Resp: $y(x) = C\sqrt{1+x^2}$

6.- $\frac{dy}{dx} = y\,cosx$ Resp: $y(x) = Ce^{senx}$

7.- $\frac{dy}{dx} = \frac{xe^y}{1+x^2}$ Resp: $y(x) = -e^{-y} = \frac{1}{2}ln|1+x^2|$

8.- $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ Resp: $y(x) = \frac{y^2}{2} - y^2 ln|x| = \frac{x^2}{2} + C$

9.- $\frac{dy}{dx} = 3y(1-y)$ Resp: $y(x) = \frac{y}{1-y} = Ce^{3x}$

10.- $y' = senx\,y^2$ Resp: $y(x) = \frac{1}{Cos(x)-C}$

11.- $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}$ Resp: $y(x) = kxe^{-\frac{1}{x}}$

12.- $\frac{dy}{dx} = \frac{5x^6-2x+1}{sen(y)+e^y}$ Resp: $y(x) = -Cosy + e^y = \frac{5}{7}x^7 - x^2 + x + C$

1.4 Transformación de una ecuación de variables no separables

Una ecuación del tipo $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ (A), donde: a, b, c $\epsilon\mathbb{R}$ se convierte en una ecuación de variables separables si se sustituye la ecuación lineal por $u = ax + by + c$ (B), derivando con respecto a x [13].

$$\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} - a}{b} \quad \text{(C)}$$

Se reemplaza (B) y (C) en (A):

$$\frac{\frac{du}{dx} - a}{b} = f(u)$$

$$dx = \frac{du}{bf(u) + a}$$

Integrando esta expresión se tiene:

$$x = \int \frac{du}{bf(u) + a} + c$$

Sustituyendo $\boldsymbol{u}$ tenemos la solución general.

Ejercicio 1.4.1

$$\frac{dy}{dx} = x - 2y + 1 \ \text{(A)}$$

En este caso, no es posible separar dy y dx de manera que cada uno quede expresado exclusivamente en términos de "x" y "y" respectivamente. Por lo tanto, la ecuación no pertenece a la categoría de ecuaciones de variables separables. Por ejemplo, al intentar separar los términos de la ecuación $dy = xdx - 2ydx + dx$, se observa que no es factible asignar un diferencial a su respectiva variable.

Cuando una ecuación diferencial tiene esta forma, es necesario transformarla en una ecuación de variables separables mediante una sustitución adecuada. Este enfoque permite simplificar la estructura de la ecuación y facilita su resolución.

$$u = x - 2y + 1 \ (\mathbf{1})$$

Derivando con respecto a x:

$$\frac{du}{dx} = 1 - 2\frac{dy}{dx}$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$ se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{du}{dx}\right) \quad \textbf{(B)}$$

También se puede despejar y de (1) y derivar con respecto a "x" y "y" :

$$y = \frac{x - u + 1}{2}$$

Se reemplaza (1) y (B) en (A) y se tiene:

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{du}{dx}\right) = u$$

$$2u = 1 - \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 1 - 2$$

$$\frac{du}{1-2u} = dx$$

Integrando:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-2u)}{1-2u} = \int dx + c$$

$$-\frac{1}{2}ln|1-2u| = x + lnc$$

$$-ln|1-2u| = 2x + 2lnc$$

$$ln|1-2u| = -2x + 2lnc$$

$$ln\left|\frac{1-2u}{c}\right| = -2x$$

$$\frac{1-2u}{c} = e^{-2x}$$

$$1 - 2u = ce^{-2x}$$

Remplazando $u = x - 2y + 1$ se obtiene:

$$1 - 2x + 4y - 2 = ce^{-2x}$$

Por tanto:

$$y = \frac{1 + 2x + ce^{-2x}}{4}$$

Ejercicio 1.4.2

Dada la ecuación diferencial, encontrar su solución

$$y' = \frac{x+y}{x+y-1} \quad \textbf{(A)}$$

$$u = x + y \quad \textbf{(B)}$$

Despejando y :

$$y = u - x$$

Derivando en función de x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1 \ \textbf{(C)}$$

Reemplazando (B) y (C) en (A):

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{u}{u-1}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1} + 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u+u-1}{u-1}$$

Integrando y separando las variables:

$$\int \frac{(u-1)\,du}{2u-1} = dx$$

Para poder efectuar la integral se aplica el algoritmo de la división:

$$\begin{array}{l|l} u-1 & 2u-1 \\ \cline{2-2} \underline{-u+\frac{1}{2}} & \quad \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \end{array} \quad \rightarrow \qquad \frac{u-1}{2u-1} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2u-1}$$

Se integra las fracciones obtenidas:

$$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ \frac{1}{2u-1}\right) du = \int dx$$

$$\int \frac{1}{2} du - \frac{1}{2} \ \int \frac{du}{2u-1} \ = \int dx$$

$$\frac{1}{2}\int du - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ \int \frac{d(2u-1)}{2u-1} = \int dx + c$$

$$\frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\ ln|2u - 1| = x + lnc$$

$$2u - ln\ |2u - 1| = 4x + lnc$$

$$ln|2u - 1| + lnc = 2u - 4x$$

$$c\ (2u - 1) = e^{2u-4x}$$

Regresando a las variables primitivas se tiene

$$c\ (2x + 2y - 1) = e^{2y-2x}$$

Ejercicio 1.4.3

Dada la ecuación diferencial, encontrar su solución:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3y + 1$$

Se deriva la expresión:

$$u = 2x + 3y + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2 + 3\frac{dy}{dx}$$

Despejando se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{du}{dx} - 2\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{du}{dx} - 2\right) = u$$

$$\frac{du}{dx} - 2 = 3u$$

Luego a esta expresión se la reduce a variables separables:

$$\frac{du}{dx} = 3u + 2$$

$$\int \frac{du}{3u + 2} = \int dx + c$$

Para resolver la integral en el primer miembro de la igualdad se cambia de variable, luego se deriva en función de la nueva variable y se reemplaza en la integral.

$$z = 3u + 2$$

$$dz = 3du$$

Despejando se tiene:

$$du = \frac{dz}{3}$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{dz}{z} = x + c$$

$$\frac{1}{3} lnz = x + c$$

Remplazando el valor de $z = 3u + 2$:

$$\frac{1}{3}\ln(3u + 2) = x + c$$

$$u = 2x + 3y + 1$$

Regresando a las variables primitivas se obtiene:

$$\frac{1}{3}\ln(3(2x+3y+1)+2)=x+c$$

$$\ln[6x+9y+5\,]=3x+c$$

$$6x+9y+5=e^{3x+c}$$

$$6x+9y+5=e^{3x}e^{c}$$

$$6x+9y+5=Ke^{3x}$$

$$y=ke^{3x}-\frac{2}{3}x-\frac{5}{9}$$

Ejercicio 1.4.4

Dada la ecuación, encontrar la solución

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x - y}{x + y}$$

En este ejercicio, la resolución de ecuaciones diferenciales de variables no separables se abordará con el apoyo de **Wolfram (Lenguaje Mathematica)**, una herramienta potente para este tipo de cálculos.

Para resolver ecuaciones diferenciales se debe definir la ecuación:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x - y}{x + y}$$

Sintaxis en Wólfram

Definir la ecuación diferencial original

```
eq = D[y[x], x] == (x + y[x])/(x - y[x]);
```

Realizar la sustitución y = v*x, donde v es una función de x

```
eqSub = eq /. y[x] -> v[x]*x /. D[y[x], x] -> v[x] + x*D[v[x], x];
```

Simplificar la ecuación resultante

```
simplifiedEq = Simplify[eqSub];
```

Resolver la ecuación diferencial simplificada

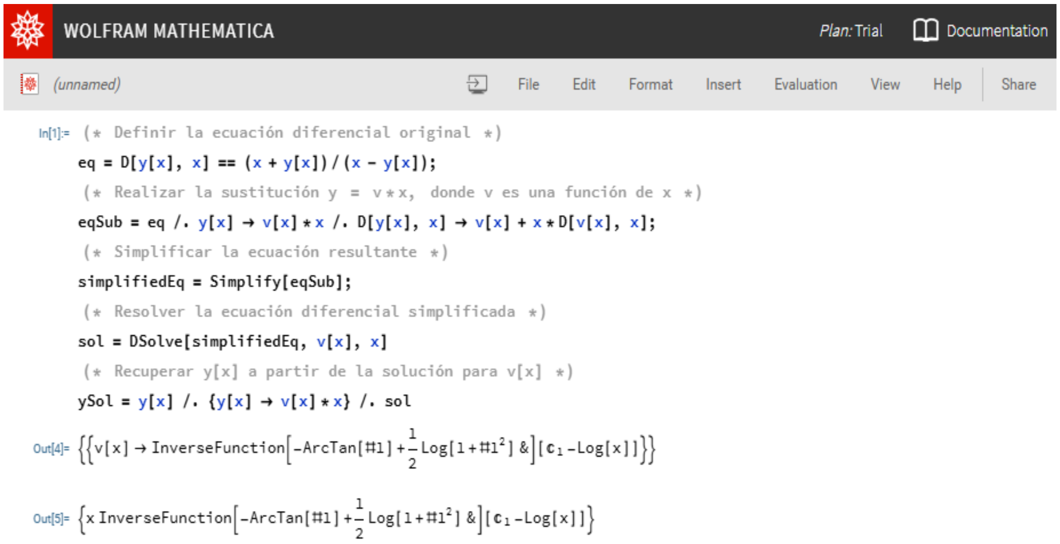
```
sol = DSolve[simplifiedEq, v[x], x]
```

Recuperar y[x] a partir de la solución para v[x]

```
ySol = y[x] /. {y[x] -> v[x]*x} /. sol
```

En la Figura 2, se presenta el resultado obtenido en el Wólfram Mathematica

Figura 2. Resultados obtenidos de la ecuación diferencial por Wólfram (lenguaje Mathematica)



Ejercicios propuestos 1.4

1.- $\frac{dy}{dx} = 3x + y$ Resp: $y(x) = 3x + y + 3 = Ke^{x}$

2.- $2y - xy' = 2(1 + 2x^2)$ Resp: $y(x) = cx^2 - 4x^2 logx + 1$

3.- $(lnx + y^2)dx - 2xydy = 0$ Resp: $y(x) = x\sqrt{cx - log\,x - 1}$

4.-$2xy^2(y' + x) = x^2$ Resp:$c_1 - \frac{x^2}{4} = (4y(x) + \sqrt{2}\,log(\sqrt{2} - 2y(x) - log(2y(x) + \sqrt{2}))$

$5. - (x + y2)dx + 2xydy = 0$ $Resp\!: 2x^2 + 2xy^2 = C$

6.- $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ $Resp\!: \frac{1}{2}\boldsymbol{ln}(x^2 + y^2 - ln|x| + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + ln(x) = C$

7.- $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$ $Resp\!: e^{\frac{y}{x}} + ln|x| = C$

$8. - \frac{dy}{dx} = \frac{2x+3\,y}{x-y}$ $Resp\!: 2\; arctang\; \left(\frac{y+x}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln|y^2 + 2xy + 2x^2| = C =$

1.5 Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Una ecuación diferencial homogénea se define como una ecuación en la cual todos los términos están formados exclusivamente por la variable dependiente y sus derivadas, sin la presencia de términos independientes de la variable dependiente. Formalmente, una ecuación diferencial homogénea puede representarse de la siguiente manera [13]:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Donde $y = y(x)$ representa la función desconocida, y' es la primera derivada de y con respecto a x, y'' representa la función desconocida. F es una función que combina estas variables y sus derivadas[8] [14 - 16]

La característica distintiva de una ecuación diferencial homogénea es que todos los términos de la ecuación se pueden combinar de manera que la ecuación se vuelve igual a cero. Esto significa que si $y(x)$ es una solución de la ecuación, entonces un constante múltiplo de $y(x)$ también será una solución.

Para resolver una ecuación diferencial homogénea, generalmente se utiliza el método de sustitución $y = vx$ donde v es una nueva variable. Esto permite transformar la ecuación en una ecuación diferencial lineal homogénea de orden reducido [13].

Ejercicio 1.5.0

$$F(x, y) = x^2y^2 - y^3x$$

Para comprobar si la ecuación diferencial es homogénea utilizo $F(\alpha x, \alpha y)$, esto significa que a cada variable le corresponde un α

$$F(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2x^2\alpha^2y^2 - \alpha^3y^3\alpha x$$

$$F(\alpha x, \alpha y) = \alpha^4x^2y^2 - \alpha^4y^3x$$

$$F(\alpha x, \alpha y) = \alpha^4(x^2y^2 - y^3x)$$

Como se puede observar al pasar de $F(\alpha x, \alpha y)$ a $\alpha^nF(x, y)$ es de grado cuatro.

En la Figura 3 se presenta la familia de soluciones de la muestra.

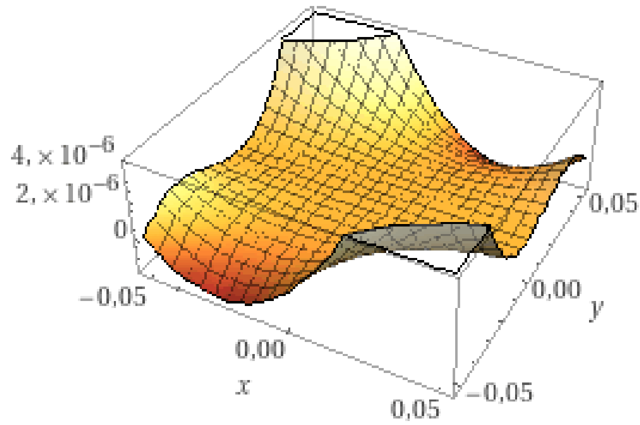


Figura 3. Familia de soluciones de la ecuación diferencial

Ejercicio 1.5.1

Resuelva la ecuación.

$$F(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$F(\alpha x, \alpha y) = \frac{\alpha^2 x^2 - \alpha^2 y^2}{\alpha^2 x^2 - \alpha^2 y^2}$$

$$F(\alpha x, \alpha y) = \frac{\alpha^2 (x^2 - y^2)}{\alpha^2 (x^2 - y^2)}$$

$$F(\alpha x, \alpha y) = \alpha^0 \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

Es una ecuación homogénea de grado cero

$$y' = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \textbf{(A)}$$

Como $F(x, y)$ es de grado cero entonces, la ecuación diferencial es homogénea, por lo tanto, se puede transformar a una ecuación de la forma $y' = \vartheta\left(\frac{y}{x}\right)$

Se divide (A) para x^2:

$$y' = \frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$y' = -\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}$$

Se realiza el siguiente reemplazo $u = \frac{y}{x}$ y se realiza la derivada de la expresión:

$$y = ux$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

$$y' = -\frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$$

Al igualar las dos expresiones se obtiene

$$u + x\frac{du}{dx} = -\frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$$

$$-\frac{(u^2 + 1)du}{u^3 + u^2 + u - 1} = \frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{(u^2 + 1)du}{u^3 + u^2 + u - 1} = \frac{dx}{x}$$

$$ln|x| = -\int \frac{(u^2 + 1)du}{u^3 + u^2 + u - 1} + c$$

Resolviendo la integral mediante Wólfram Mathematica el valor obtenido es:

$$ln|x| = -ln|u^3 + u^2 + u - 1| + C$$

Sustituyendo esta expresión a las variables primitivas se obtiene:

$$ln|x| = -ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} - 1\right| + lnC$$

$$x = \frac{C}{\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} - 1}$$

En la Figura 4 se presenta la gráfica de la ecuación en 3D en el programa Wólfram Alpha

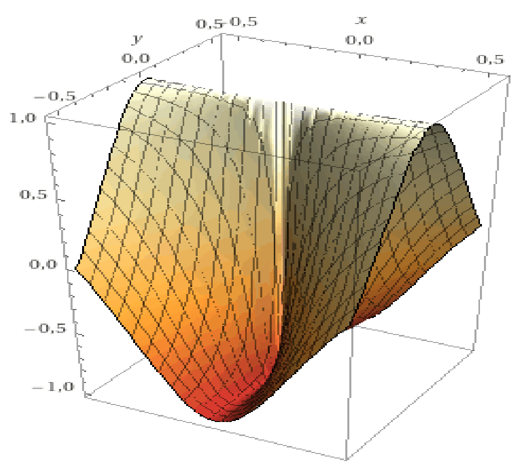


Figura 4. Familia de soluciones de la muestra en 3D en el programa Wólfram Alpha

Dominio $[(x, y)\epsilon\mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0]$

Rango $[f \epsilon \mathbb{R}: -1 \leq F \leq 1]$

Ejercicio 1.5.2

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

Como:

$$F(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

$$F(\alpha x, \alpha y) = \frac{\alpha^2(x^2 + y^2)}{\alpha(x + y)}$$

$$F(\alpha x, \alpha y) = \alpha(\frac{x^2+y^2}{x-y})$$

$F(\alpha x, \alpha y)$ es de grado uno, lo que implica que la función $F(x, y)$ también es de grado uno. Sin embargo la ecuación diferencial $y' = \frac{x^2+y^2}{x-y}$ no es homogénea ya que para ser homogenia todos los términos en el numerador y denominador deben ser del mismo grado.

Toda ecuación diferencial homogénea es de forma $y' = \vartheta\left(\frac{y}{x}\right)$

Una ecuación diferencial homogénea debe resolverse mediante el remplazo de $\frac{y}{x}$ por u ó cualquier letra; también puede hacerse un remplazo de $\frac{x}{y}$ hasta obtener una ecuación diferencial de variables separables.

La Figura 5 representa la gráfica de la ecuación en 3D programa Wólfram Alpha

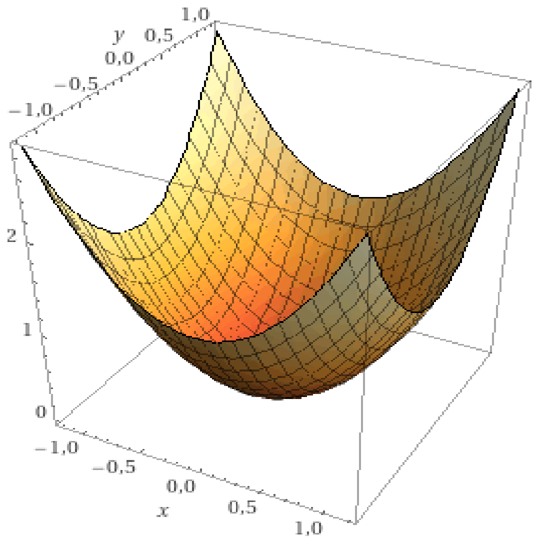


Figura 5. Familia de soluciones de la muestra en 3D en el programa Wólfram Alpha

$Dominio\ \mathbb{R}^2$

$Rango\ \{z \in \mathbb{R}: z \geq 0\}$

Ejercicio 1.5.3

Resuelva

$$y' = \frac{x - y}{x + y}$$

$$y' = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}} \quad \textbf{(A)}$$

Realizo el reemplazo de $\frac{y}{x}$ por u y derivo la expresión resultante:

$$u = \frac{y}{x} \quad (\mathbf{1})$$

$$ux = y$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}(\boldsymbol{B})$$

Reemplazando (1) y (B) en (A):

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1-u}{1+u}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

$$\frac{(1+u)du}{1-2u-u^2} = \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{(u+1)du}{u^2+2u-1} = \frac{dx}{x}$$

Integrando:

$$-\frac{1}{2}\int\frac{(2u+2)du}{u^2+2u-1} = \int\frac{dx}{x} + c$$

$$-\frac{1}{2}ln|u^2+2u-1| = ln + c$$

$$\ln|u^2+2u-1| = -2lnx + c$$

$$\cancel{\ln}(|u^2+2u-1|) = \cancel{ln}x^{-2}c$$

$$\left(\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{x}{y} - 1\right)(x^2) = c$$

$$y^2 + 2xy - x^2 = c$$

1.6 Modelos Matemáticos aplicados a Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Ejemplo 1.6.1 Curva con Razón Constante

Hallar la curva $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ tal que la razón del segmento interceptado por la tangente en el eje $\boldsymbol{y}$ al radio vector desde el origen sea una constante k.

La pendiente de la tangente en un punto $(x, f(x)) es\ f'(x)$.

La ecuación de la tangente es:

$$y - f(x) = f'(x)(x - x_o)$$

Intersección con el eje y (donde $x = 0$) en :

$$y = f(x) - f'(x)x$$

La intersección en y $es\ f(0) - f'(x)x$

El radio vector desde el origen es:

$$r = \sqrt{x^2 + f(x)^2}$$

La razón entre el segmento interceptado y el radio vector debe ser constante:

$$\frac{f(0) - f'(x)x}{\sqrt{x^2 + f(x)^2}} = k$$

Simplificar y resolver:

$$f(0) - f'(x)x = k\sqrt{x^2 + f(x)^2}$$

Al elevar al cuadrado y reorganizar se obtiene una ecuación diferencial.

$$f'(x) = \frac{f(0) - k\sqrt{x^2 + f(x)^2}}{x}$$

$$f'(x) = \frac{f(0) - k\sqrt{x^2 + f(x)^2}}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(0) - k\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

Sugerencia $y = ux,\ dy = udx + xdu$ y para un $f(0) = a,\ a > 0$

La curva resultante es:

$$y = kx + C$$

1.6.2 Ejercicio para desarrollar:

Hallar la curva para la cual la razón del segmento interceptado por la tangente en el eje $O\ Y$, el radio vector es una cantidad constante.

Resp: $y = \frac{1}{2}ky^{1-c} - \frac{1}{k}x^{1+c}$

1.7 Ecuación de la forma $y' = f(ax + by + c)$

Una ecuación del tipo $y' = f(ax + by + c)$ que es la misma expresión en la transformación de una ecuación de variables no separables a una ecuación de variables separables (también se denomina ecuación lineal)

Se trata de obtener una ecuación de variables separables.

$$y' = f(ax + by + c) \quad \textbf{(A)}$$

Reemplazando la expresión $(ax + by + c)$ por se u obtiene:

$$u = ax + by + c \quad \textbf{(B)}$$

Derivando (B) con respecto con x :

$$\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right) \quad \textbf{(C)}$$

Se reemplaza (B) y (C) en (A):

$$\frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right) = f(u)$$

$$\frac{du}{dx} - a = bf(u)$$

$$\frac{du}{dx} = b\,f\,(u) + a$$

Integrando se obtiene:

$$\int dx = \int \frac{du}{bf(u)+a}$$

$$\boxed{x = \int \frac{du}{bf(u)+a} + c \rightarrow \ Solución\ General}$$

Ejercicio 1.7.0
Resuelva

$$y' = \frac{1}{2x-y+1} \qquad \textbf{(A)}$$

Sea:

$$u = 2x - y + 1 \quad \textbf{(B)}$$

$$y = 2x - u + 1$$

Se deriva (B):

$$y' = 2 - \frac{du}{dx} \quad \textbf{(C)}$$

Se reemplaza (B) y (C) en (A):

$$\frac{1}{u} = 2 - \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 2 - \frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2u-1}{u}$$

$$\frac{u\,du}{2u-1} = dx \quad (\mathbf{D})$$

Esta expresión (D) es de variables separables como el primer miembro no podemos integrar se realiza un nuevo remplazo para obtener una fórmula poder integrar.

$$2u - 1 = z$$

$$u = \frac{z+1}{2} \quad (\mathbf{1})$$

Derivando se obtiene:

$$du = \frac{1}{2}dz \quad (\mathbf{2})$$

Se sustituye (1) y (2) en (D):

$$\frac{\frac{1}{2}(z+1)\frac{1}{2}dz}{2\left(\frac{z+1}{2}\right)-1} = dx$$

$$\frac{\frac{1}{4}(z+1)dz}{z} = dx$$

$$\frac{zdz+dz}{z} = 4dx$$

$$\int dz + \int \frac{dz}{z} = \int 4\,dx$$

$$z + ln|z| = 4x + c$$

$$\ln\frac{z}{c} = 4x - z$$

$$z = c\,e^{4x-z}$$

$$2u - 1 = c\,e^{4x-2u+1}$$

$$2(2x-y+1) - 1 = c\,e^{4x-2(2x-y+1)+1}$$

$$4x - 2y + 2 - 1 = c\,e^{4x-4x+2y-2+1}$$

$$4x - 2y + 1 = c\,e^{2y-1} \quad //$$

Ejercicio 1.7.1

$$y' = \frac{2xy}{3x^2-y^2} \quad \textbf{(A)}$$

La ecuación es homogénea, similar grado numerador y denominador

Se aplica el cambio de variable:

$$u = \frac{y}{x}$$

$$y = ux \qquad \textbf{(B)}$$

$$y' = u + x\frac{du}{dx} \quad \textbf{(C)}$$

Se reemplaza (B) y (C) en (A):

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2x^2u}{3x^2 - x^2u^2}$$

Se divide por x^2 y se obtiene:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{3 - u^2}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{3 - u^2} - u$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2u - 3u + u^3}{3 - u^2}$$

$$\frac{x\,du}{dx} = \frac{u^3 - u}{3 - u^2}$$

$$\frac{3 - u^2}{u^3 - u}\,du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{3 - u^2}{u^3 - u}\,du$$

$$ln\,|x| = \int \frac{3 - u^2}{u^3 - u}\,du$$

Como la integral obtenida no es posible resolver con integración inmediata, transformo en fracciones parciales:

$$-\frac{u^2 - 3}{u(u+1)(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} + \frac{C}{u-1}$$

$$= \frac{A\,u^2 - A + Bu^2 - Bu + Cu^2 + Cu}{u(u+1)(u-1)}$$

$$= \frac{(A+B+C)u^2 - (A) + (C-B)u}{u(u+1)(u-1)}$$

1. $1 = A + B + C$
2. $0 = C - B$
3. $-3 = -A$

(1) + (**2**) y reemplazo el valor de A

$1 = A + 2C$

$1 = 3 + 2C$

$A = 3$ $\qquad$ $C = -1$

$0 = -1 - B$

$B = -1$

$$ln\,|x| = -\int \frac{u^2-3}{u^3-u}\;du$$

$$ln\,|x| = -\int \left(\frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} + \frac{c}{u-1}\right) du$$

$$ln\,|x| = -\int \left(\frac{3}{u} - \frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right) du$$

$$ln\,|x| = -\int \frac{3}{u}\;du + \int \frac{du}{u+1} + \int \frac{du}{u-1}$$

$$ln\,|x| = -3\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u+1} + \int \frac{du}{u-1}$$

$$ln\,|x| = -3ln\,|u| + ln\,|u+1| + ln\,|u-1| + lnc$$

$$ln\,|u|^3 - ln\,(u+1)(u-1) = -ln\,|x| + ln\,c$$

$$\ln|u|^3 + lnx - \ln(u+1)(u-1) = \ln|c|$$

$$\ln\frac{u^3x}{(u+1)(u-1)} = lnc$$

Eliminando logaritmos se obtiene:

$$\frac{u^3x}{(u+1)(u-1)} = c$$

Como $u = \frac{y}{x}$ y regresando a las variables primitivas la expresión queda:

$$\frac{\frac{y^3x}{x^32}}{\frac{y^2}{x^2} - 1} = c$$

$$\frac{\frac{y^3}{x^2}}{\frac{y^2+x^2}{x^2}} = c$$

$y^3 = c\,(y^2 - x^2)$ → Solución de la ecuación diferencial

Ejercicio 1.7.2

$$(x^2 - xy)dx - y^2dy = 0 \ \ \textbf{(A)}$$

La ecuación que se presenta a continuación es una ecuación homogénea, se remplaza la expresión:

$$u = \frac{y}{x}$$

$$x^2\left(1 - \frac{y}{x}\right)dx - \left(\frac{y}{x}\right)^2 dy = 0$$

Dividiendo para x^2 se tiene:

$$\left(1 - \frac{y}{x}\right)dx - \left(\frac{y}{x}\right)^2 dy = 0$$

$$u = \frac{y}{x}$$

$$y = ux$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

Cabe destacar que:

El reemplazo de $y = ux$ o $x = uy$ se lo hace de acuerdo con la complejidad del término.

$$1 - u - u^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(1 - u) - u^2\left(u + x\frac{du}{dx}\right) = 0$$

$$1 - u - u^3 - u^2x\frac{du}{dx} = 0$$

Al realizar el producto la expresión nos presenta de la siguiente forma:

$$1 - u - u^3 = xu^2\,\frac{du}{dx}$$

Dejando la expresión en función $\frac{dx}{x}$ se obtiene:

$$\frac{dx}{x} = \frac{u^2\,du}{1 - u - u^3}$$

Por ejemplo, se utilizará $x = uy$ cuando la estructura de $M\,(x, y)$ sea más simple.

Que pasa reemplazando $u = \frac{x}{y}$, es decir $\frac{dx}{dy}$

$$\frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy}$$

$$dx = udy + ydu$$

$$x = uy \quad (\boldsymbol{B})$$

$$dx = udy + ydu \quad (\boldsymbol{C})$$

Se reemplaza (**B**)y (**C**) en (**A**):

$$(u^2y^2 - uy^2)\,(udy + ydu) - y^2dy = 0$$

$$u^3dy - u^2dy + u^2ydu - yudu - dy = 0$$

$$(u^3 - u^2 - 1)dy + uy(u - 1)du = 0$$

Se divide por $(u^3 - u^2 - 1)y$ para obtener:

$$\frac{(u^3 - u^2 - 1)dy}{(u^3 - u^2 - 1)y} + \frac{uy(u - 1)du}{(u^3 - u^2 - 1)y} = 0$$

Simplificando la expresión dada se obtiene:

$$\frac{dy}{y} + \frac{u^2 - u}{u^3 - u^2 - 1}\ du\ = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{1}{3}\left(\frac{3u^2 - 3u}{u^3 - u^2 - 2}\right)\ du = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} + \frac{1}{3}\ \int \frac{3u^2 - 2u}{u^3 - u^2 - 1}\ du - \frac{1}{3}\ \ \int \frac{u}{u^3 - u^2 - 1}\ du = 0$$

$$ln\ |y| + \frac{1}{3}\ ln\ |u^3 - u^2 - 2| - \frac{1}{3}\ \int \frac{u}{u^3 - u^2 - 1}\ du = 0$$

$$ln\ |y| + \frac{1}{3}\ ln\ \left|\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\right| - \frac{1}{3}\ \int \frac{u}{u^3 - u^2 - 1}\ du = 0$$

Es posible que no haya una solución elemental para esta integral y que sea necesario recurrir a métodos numéricos para aproximar el valor de la integral. El valor obtenido mediante Wólfram Mathematica es:

$$\frac{1}{3}ln|u - 1| - \frac{1}{3}ln|u^2 + u + 1| + C$$

Donde C es una constante de integración. Regresando a las variables primitivas se obtiene

$$\frac{1}{3}ln\left|\frac{x}{y} - 1\right| - \frac{1}{3}ln\left|\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) + 1\right| + C$$

Después, la solución de la ecuación diferencial es la siguiente:

$$ln\ |y| + \frac{1}{3}\ ln\ \left|\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\right| - \frac{1}{3}\ \ [\frac{1}{3} ln\left|\frac{x}{y} - 1\right| - \frac{1}{3} ln\left|\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) + 1\right| + C\,] = 0$$

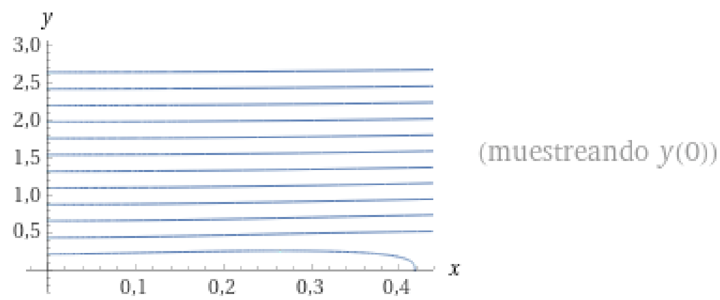


Figura 6. Familia de soluciones para la ecuación proporcionada por Wólfram Alpha.

Ejercicios Propuestos 1.7

1.- $x^2\,dx + y^2 dy = 0$ Resp: $y(x) = \sqrt[3]{c + x^3}$

2.$(\mathrm{x} - \mathrm{y})\mathrm{dx} - \mathrm{ydy} = 0$ Resp: $\mathrm{y(x)} = \frac{1}{10}\left(\left(5 + \sqrt{5}\right)\log\left(\frac{2y(x)}{x} + \sqrt{5} + 1\right) - \left(\sqrt{5} - 5\right)log\left(\frac{2y(x)}{x} + \sqrt{5} - 1\right)\right) = c - logx$

3.- $(x^2 + y)dx - 2ydy = 0$ Resp: $\frac{x^2}{2y} - y + \frac{1}{2}ln|x| = \frac{y}{x} + C$

4.- $(x^2 + y)dx - 2ydy = 0$ Resp: $x = \frac{C}{\left(1 - \frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{2\frac{y}{x} + 1}}$

1.8 Ecuaciones Diferenciales que pueden convertirse en Homogéneas

Una ecuación diferencial del tipo $y' = F\left(\frac{a_1+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ (**A**); $a, b, c \in \mathbb{R}$ que no cumple las condiciones de una ecuación homogénea por sus términos independientes, puede convertirse en homogénea bajo el siguiente criterio [11], [17], [18].

Si suponemos que la recta l_1, representa a la ecuación $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y l_2 representa la ecuación $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Rectas no paralelas

CASO UNO: Si las rectas no pasan por el origen, es decir $si\ l_1\ y\ l_2$ no son paralelos

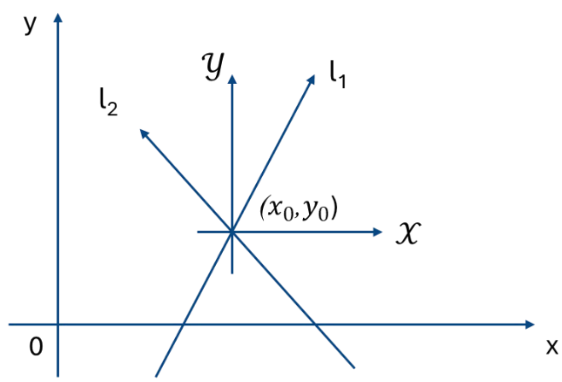


Figura 7. Traslación de ejes con centro en la intersección de las rectas ***l*1** y ***l*2**

Mediante una transformación, trasladamos el origen de coordenadas al punto de intersección asumiendo como (x_0, y_0) de las rectas l_1 y l_2 como se indica en la Figura 7.

Las ecuaciones de transformación son:

$$\left.\begin{array}{l} x = \mathcal{X} + x_0 \\ y = \mathcal{Y} + y_0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Derivando las ecuaciones se obtine} \qquad \begin{array}{l} dx = d\mathcal{X} + 0 \\ dy = d\mathcal{Y} + 0 \end{array} \quad (\boldsymbol{B})$$

Se ha trasladado los ejes de coordenadas "x" y "y" a un nuevo eje de coordenadas arbitrario $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$, donde x_0 y y_0 son los puntos de intersección de las dos rectas y considerando $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Luego se realiza la siguiente sustitución (B) en (A) [19].

$$\frac{d\mathcal{Y}}{d\mathcal{X}} = F\left(\frac{a_1\mathcal{X}+b_1\mathcal{Y}}{a_2\mathcal{X}+b_2\mathcal{Y}}\right) \quad \rightarrow \quad \text{Es una ecuación homogénea}$$

Ejercicio 1.8.0

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x-y+1} \qquad (\boldsymbol{A})$$

Primero hallamos el punto de intersección (x_0, y_0):

$$l_1: x+y+1=0$$
$$l_2: x-y+1=0$$

Sumando l_1 y l_2 se obtiene:

$$\begin{array}{r} x+y+1=0 \\ x-y+1=0 \\ \hline 2x \quad +2=0 \end{array}$$

Por tanto:

$$x_0=-1$$
$$y_0=0$$

Este punto reemplazo en las ecuaciones de transformación para hallar $d\mathcal{X}$ y $d\mathcal{Y}$. Entonces
se utiliza las ecuaciones de transformación:

$$\left.\begin{array}{l} x=\mathcal{X}+x_0 \\ y=\mathcal{Y}+y_0 \end{array}\right\} \quad \textbf{(B)}$$

$$x=\mathcal{X}-1$$
$$y=\mathcal{Y}+0$$

$$\begin{array}{l} dx = d\mathcal{X} \\ dy = d\mathcal{Y} \end{array} \quad \textbf{(C)}$$

Luego sustituimos (B) y (C) en (A)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mathcal{X}-1+\mathcal{Y}+0+1}{\mathcal{X}-1-\mathcal{Y}+0+1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mathcal{X}+\mathcal{Y}}{\mathcal{X}-\mathcal{Y}}$$

Como es una ecuación homogénea se procede a resolverla

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{X}}+\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}}}{\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{X}}-\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}}}=\frac{1+\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}}}{1-\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}}}$$

Luego sustituimos:

$$z=\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}}$$

$$\frac{d\mathcal{Y}}{d\mathcal{X}}=\frac{1+z}{1-z} \qquad (\boldsymbol{M})$$

También se puede realizar la sustitución:

$$\mathcal{Y}=\mathcal{X}z$$

$$\frac{d\mathcal{Y}}{d\mathcal{X}}=z+\mathcal{X}\frac{dz}{d\mathcal{X}} \qquad \textbf{(N)}$$

Reemplazamos (N) en (M):

$$z+\mathcal{X}\frac{dz}{d\mathcal{X}}=\frac{1+z}{1-z}$$

$$\mathcal{X}\frac{dz}{d\mathcal{X}}=\frac{1+z}{1-z}-\frac{z}{1}=\frac{1+z-z+z^2}{1-z}$$

$$\mathcal{X}\frac{dz}{d\mathcal{X}}=\frac{1+z^2}{1-z}$$

$$\frac{(1-z)dz}{1+z^2}=\frac{d\mathcal{X}}{\mathcal{X}}$$

$$\frac{1}{1+z^2}\,dz - \frac{z}{1+z^2}\,dz = \frac{d\mathcal{X}}{\mathcal{X}}$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} - \int \frac{zdz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

Resolviendo la integral se obtiene:

$$arctg\ z - \frac{1}{2}\ ln\,|1+z^2| = ln\ \mathcal{X} + c$$

$$2\ arctg\ z - ln\ \ |1+z^2| = 2\ ln\ \mathcal{X} + 2\ ln\ c$$

$$2\ arctg\ z = ln|\ c\mathcal{X}^2\ (1+z^2)|$$

$$e^{2arctg\ z} = c\ \mathcal{X}^2\ (1+z^2)$$

Remplazando $z = \frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}}$, y regresando a las variables primitivas se obtiene:

$$e^{2arctg\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}}} = c\ \mathcal{X}^2\left(1+\frac{\mathcal{Y}^2}{\mathcal{X}^2}\right) = c\ (\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2)$$

$$x = \mathcal{X} - 1 \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{X} = x + 1$$
$$y = \mathcal{X} + 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{Y} = y$$

Sustituyendo las variables primitivas se tiene:

$$e^{2arctg\ tg\frac{y}{x+1}} = c\ ((x+1)^2 + y^2)$$

$$(x+1)^2 + y^2 = c\ e^{2arc\ tg\frac{y}{x+1}}$$

CASO DOS: Si las rectas no son paralelas y pasan por el origen. En este caso desaparecen las constantes y se trata de una ecuación homogénea.

$$y' = \frac{2x+y}{x-y} \qquad (\boldsymbol{C})$$

Se efectúa su división por x:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

Se reemplaza:

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2+z}{1-z} \quad (\mathbf{A})$$

También se puede realizar la sustitución:

$$y=zx$$

$$\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx} \quad (\mathbf{B})$$

Sustituimos (B) en (A):

$$z+x\frac{dz}{dx}=\frac{2+z}{1-z}$$

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{2+z-z+z^2}{1-z}$$

$$\frac{(1-z)dz}{2+z^2}=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{dz}{2+z^2}-\frac{zdz}{2+z^2}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dz}{1+z^2}-\frac{1}{2}\int\frac{2z \quad dz}{1+z^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$arc\ tgz-\frac{1}{2}ln \quad |1+z^2|=\ Ln\ |x|\ +lnc$$

$$2arc\ \ tgz = ln\,|1+z^2|\ + ln\,|x^2|\ +\ lnc$$

$$2\ arc\ tg\ z = \ c\ lnx^2(1+z^2)$$

$$2\ arc\ tg\ z = \ z\ lnx^2(1+z^2)$$

$$e^{2\ arc\ tg\ z}\ = \ cx^2(1+z^2)$$

$$e2arc\ tg\ \frac{y}{x}\ = c\ (x^2 + x^2\frac{y^2}{x^2})$$

$$x^2 + y^2 = \text{c}\ \ e^{2arctg\frac{y}{x}}$$

Rectas paralelas

CASO UNO: Si las rectas $l1\ y\ l2$ son paralelas y no coinciden los términos independientes.

$$y' = f\ (\frac{a1x+b1y+c1}{a2x+b2y+c2}) \qquad \textbf{(A)}$$

$$\frac{a1}{a2} = \frac{b1}{b2} = \lambda \qquad \textbf{(B)}$$

Despejando $a1$ y $b1$ de (B):

$$a_1 = a_2\lambda\ y\ \ b_1\ =\ b_2\lambda$$

Luego se reemplaza en (A):

$$y' = f\left(\frac{\lambda(a2x+b2y)+c1}{a2x+b2y+c2}\right)$$

$$y' = \varphi(a_2x + b_2y)$$

Ejercicio 1.8.1

$$y' = \frac{2x - 4y + 1}{x - 2y + 3} \qquad (\mathbf{A})$$

Son paralelas, pero no coinciden porque los términos independientes son diferentes. En este caso sacamos factor común de las variables.

$$y' = \frac{2(x-2y)+1}{(x-2y)+3} \qquad (\mathbf{A})$$

Se realiza el remplazo del factor y término semejante por una letra cualquiera:

$$u = x - 2y \qquad (\mathbf{B})$$

Derivando con respecto a x:

$$\frac{du}{dx} = 1 - 2\frac{dy}{dx}$$

$$2\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(1 - \frac{du}{dx}\right)}{2} \qquad (\mathbf{C})$$

Reemplazando (B) y (C) en (A) :

$$\frac{1-\frac{du}{dx}}{2}=\frac{2u+1}{u+3}$$

$$1-\frac{du}{dx}=\frac{4u+2}{u+3}$$

$$\frac{du}{dx}= \quad 1-\frac{4u+2}{u+3}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{u+3-4u-2}{u+3}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1-3u}{u+3}$$

$$\frac{(u+3)du}{(1-3u)}=dx$$

$$dx=\frac{-(u+3)du}{(3u-1)} \qquad (\mathbf{D})$$

Como el segundo miembro no se puede integrar entonces hago un segundo reemplazo.

Tomando en consideración que $3u\ -1\ =\ z$ se obtiene:

$$\frac{dz}{du}=\ 3\frac{du}{du}+\ 0$$

$$\frac{dz}{du}=3$$

$$du = \frac{1}{3}dz \quad (\mathbf{E})$$

Sustituimos (E) en (D) :

$$-dx = \frac{(u+3)\frac{1}{3}dz}{z}$$

Como $3u - 1 = z$ y $u = \frac{z+1}{3}$ entonces se obtiene:

$$-dx = \frac{\left(\frac{z+1}{3} + \frac{3}{1}\right)\frac{1}{3}dz}{z} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{z+1+9}{3}\right)dz}{z}$$

$$-dx = \frac{(z+10)dz}{9z}$$

$$-9dx = \frac{(z+10)dz}{z}$$

$$-9\int dx = \int \frac{z+10}{z}dz$$

$$-9x = \int 1 + \frac{10}{z}dz$$

$$-9x = \int dz + 10\int \frac{dz}{z}$$

$$-9x = z + 10ln|z|$$

$$Z + 10ln(z) + 9x = 0$$

Reemplazando $z = 3u - 1$ se tiene:

$$3u - 1 + 10ln(3u - 1) + 9x = 0$$

Sustituyendo $u = x - 2y$ se obtiene:

$$3x - 6y - 1 + 10\ ln(3x - 6y - 1) + 9x = c$$

CASO DOS: Si las rectas $l_1\ y\ l_2$ son paralelas y coinciden. En este caso solo sacamos factor común para que coincidan los coeficientes. Si es necesario y se reduce a una constante ya que no tiene términos independientes.

Ejercicio 1.9.2

$$y' = \frac{4x-2y+6}{2x-y+3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cancel{(2x-y}+3)}{\cancel{(2x-y}+3)}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

$$dy = 2dx$$

$$\int dy = 2\int dx$$

$$y = 2x + c$$

1.9 Ecuación Diferencial Homogénea Generalizada

Una ecuación diferencial homogénea generalizada es una ecuación diferencial en la que todas las funciones involucradas y sus derivadas aparecen multiplicadas por una misma función. En general, una ecuación homogénea generalizada se puede escribir de la siguiente manera:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 .$$

Esta ecuación representa una relación entre la función y y sus derivadas en diferentes órdenes [8].

Ejercicio 1.9.0

Se identificará la suma exponencial (S.exp.) de cada término para definir si la ecuación diferencial es o no homogénea

$(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ ($\boldsymbol{A}$)

S.exp. ***4*** S.exp. ***0*** S.exp. ***4*** $\longrightarrow$ no es homogénea

Si queremos considerar como homogénea, suponemos: que "$\boldsymbol{x}$" y " $\boldsymbol{dx}$ "es de grado **1** y "$\boldsymbol{y}$" **y** "$\boldsymbol{dy}$ "es de grado $\boldsymbol{\alpha}$

$$x^2y^2dy - dy + 2xy^3dx = 0$$

Como todos los términos deben tener la misma S.exp. :

$$\boldsymbol{y = z^{\alpha}}$$

Si se considera $\alpha = -1$ entonces se tiene:

$$\boldsymbol{y = z^{-1}} \quad (\mathbf{B})$$

$$y' = z^{\alpha-1}\alpha$$

$$y' = z^{\alpha} * z^{-1} * \alpha$$

$$\frac{dy}{dz} = D_z\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{z\,Dz(1) - 1\,Dz(z)}{z^2}$$

$$\frac{dy}{dz} = -z^{-2}$$

$$\mathrm{dy} = -\mathrm{z}^{-2}\mathrm{dz} \quad (\mathbf{C})$$

Para hallar el valor de α, se establece $y = z^{\alpha}$ de x^2y^2dy y se tiene:

$$2 + 2\alpha + \alpha = 2 + 3\alpha$$

Como los términos deben tener el mismo grado, se obtiene la siguiente expresion

$$2 + 3\alpha = \alpha$$

$$2 = -2\alpha$$

$$\alpha = -1$$

Se reemplaza (B) y (C) en (A):

$$(x^2z^{-1} - 1)(-z^{-2}dz) + 2xz^{-3}dx = 0$$

$$\left(\frac{-x^2 + z^2}{z^2}\right)\frac{dz}{z^2} + \frac{2x}{z^3}dx = 0$$

$$\frac{(x^2 - z^2)dz}{z^4} + \frac{2x}{z^3}dx = 0$$

$(-x^2 + z^2)dz + 2xzdx = 0 \;\; D$

S.exp.;2 S.exp.;2 S.exp.;2 → esta es una ecuación diferencial homogénea.

Solución de la ecuación homogénea:

$$u = \frac{z}{x}$$

$$z = ux \quad (\mathbf{E})$$

$$\frac{dz}{dx} = u\frac{dx}{dx} + x\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

$$dz = udx + x\frac{du}{dx}.dx$$

$$dz = udx + xdu \qquad (\boldsymbol{F})$$

Reemplazando (E) y (F) en (D):

$$(u^2x^2 - x^2)(udx + xdu) + 2x^2udx = 0$$

Dividido para x^2:

$$(u^2 - 1)(udx + xdu) + 2udx = 0$$

$$u(u^2 - 1)dx + x(u^2 - 1)du + 2udx = 0$$

$$(u^3 - u + 2u)dx + x(u^2 - 1)du = 0$$

$$(u^3+u)dx + x(u^2-1)du = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{(u^2-1)du}{(u^3+u)}$$

Se transforma en ecuación de variables separables:

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{u^2-1}{u(u^2+1)}du$$

$$\ln(x) = -\int \frac{u^2-1}{u(u^2+1)}du$$

Transformamos en fracciones paralelas:

$$\frac{u^2-1}{u(u^2+1)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+c}{u^2+1}$$

$$\frac{u^2-1}{u(u^2+1)} = \frac{Au^2+A+Buu+cu}{u(x^2+1)}$$

$$\frac{u^2-1}{u(u^2+1)} = \frac{Au^2+Bu^2+cu+A}{u(x^2+1)}$$

$$u^2-1 = (A+B)u^2 + cu + A$$

1. $A+B=1 \qquad A=-1$

2. $C=0 \qquad B=2$

3. $A=-1 \qquad C=0$

$$\ln(x)=-\int(\frac{A}{u}+\frac{Bu+c}{u^2+1})$$

$$\ln(x)=-\int(\frac{-1}{u})-\int\frac{2u}{u^2+2}du$$

$$\ln(x)=\int\frac{du}{u}-\int\frac{2u}{u^2+2}du$$

$$\ln(x)=\ln(u)-\ln(u^2+1)+lnc$$

$$\ln(x)-\ln(u)+\ln(u^2+1)+lnc=0$$

$$\cancel{\ln}\left(\frac{x(u^2+1)}{u}\right)=\cancel{\ln}c$$

$$\frac{x(u^2+1)}{u}=c;x(u^2+1)=uc$$

Reemplazando se tiene:

$$x\left(\frac{z^2}{x^2}+1\right)=c\frac{z}{x}$$

$$z^2+x^2=cz$$

Como:

$$y=z^{-1}$$

$$z=y^{-1}$$

$$y^{-2} + x = c\frac{1}{y}$$

$$\frac{1 + xy^2}{y^2} = \frac{c}{y}$$

$$xy^2 + 1 = cy$$

Resumiendo, para encontrar el valor de α suponemos que:

$$y = z^{\alpha} \qquad (\mathbf{N})$$

Por tanto se deriva esta expresión:

$$dy = \alpha\, z^{\alpha-1}dz \qquad (\mathbf{M})$$

Se reemplaza (N) y (M) en (A):

$$(x^2z^{2\,\alpha} - 1)\alpha z^{2-1}dz + 2xz^{3\alpha}dx = 0$$

$$\alpha x^2z^{3\alpha-1}dz - \alpha z^{2-1}dz + 2xz^{3\alpha}dx = 0$$

Para que la ecuación sea homogénea las S.exp. de cada término de la ecuación deben ser iguales:

Esto es:

$$2 + 3\alpha - 1 = \alpha - 1 = 1 + 3\alpha$$

Formando un sistema de ecuaciones se tiene:

1 .- $3\alpha + 1 = \alpha - 1$

$$2\alpha = -2$$

$$\alpha = -1$$

2 .- $3\alpha + 1 = 1 + 3\alpha$

No expresa nada $0 = 0$

3 .- $\alpha - 1 = 1 + 3\alpha$

$$-2 = 2\alpha$$

$$\alpha = -1$$

Para darnos cuenta de que no puede ser homogénea generalizada; observamos que al encontrar el α , el mismo tiene más de un valor.

1.10 Ecuaciones Diferenciales Exactas

Una ecuación diferencial de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta, si existe una función $\varphi(x,y)$cuyo diferencial total es igual a $\mathrm{d}\varphi(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ entonces $\mathrm{d}\varphi = 0 \;\; y \;\; \varphi = cte$ [20][21].

Ejemplo:

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 3y$$

Supongamos que en este caso se vaya a construir una ecuación diferencial.

$$d\varphi(x,y) = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial y}dy$$

Ésta es la diferencial total:

$$d\varphi(x,y) = (2xy^2 + 2)dx + (2x^2y - 3)dy$$

Es decir, que podíamos haber dicho que la ecuación:

$$(2xy^2 + 2)dx + (2x^2y - 3)dy = 0 \quad (\mathbf{A})$$

Es exacta para eso debe existir una función $\varphi\ (x,y)$ que sea igual a (A).

Si la ecuación diferencial (A) es exacta, debe existir una función $\varphi(x,y)$; cuya diferencial total es:

$$d\varphi(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (\mathbf{B})$$

Nótese que si:

$$d\ \varphi(x, y) = 0$$

Entonces:

$$\varphi(x, y) = c \quad (\mathbf{M})$$

Como sabemos que el diferencial total de $\varphi(x, y)$ es:

$$d\varphi(x, y) = \frac{d\varphi(x, y)}{dx} dx + \frac{d\varphi(x, y)}{dy} dy \quad (\mathbf{C})$$

Entonces (B) y (C) es la misma, esto se ha podido realizar con la condición que (A) es exacta**.**

Comparando (B) y (C) tenemos que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = M$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = N$$

Volviendo a derivar tenemos:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Si las funciones son continuas entonces se obtiene la siguiente expresión.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Ejercicio 1.10.0

$$(2xy^2 + 2)dx + (2x^2y - 3)dy = 0$$

Observamos si es exacta; para esto se identifica M y N luego se deriva M con respecto a "y" y N con respecto a "x" en forma parcial.

$$M = 2xy^2 + 2$$

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = 4xy$$

$$N = 2x^2\mathrm{y} - 2$$

$$\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}} = 4xy$$

Si $\partial M/\partial y$ es igual a $\partial N/\partial x$, es la condición que define que la ecuación sea exacta.

En este caso vemos que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy$$

Entonces la ecuación diferencial es exacta.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N$$

$$\partial \varphi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy^2 + 2 \quad \mathbf{(1)}$$

$$\partial\varphi(x, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2x^2y - 3 \quad (\mathbf{2})$$

Integramos (1) *o* (2), según presente menor grado de dificultad al integrar. Entonces se podría elegir una de las dos condiciones tal como se indica a continuación:

Si se integra (1) con respecto a x

Si se integra (2) con respecto a y

En este caso se elige la primera opción y se integra :

$$\partial\varphi(x, y) = (2xy^2 + 2)dx$$

$$\varphi(x, y) = \int (2xy^2 + 2)dx$$

$$\varphi(x, y) = x^2y^2 + 2x + g(y) \quad (3)$$

Al momento de integrar se suma una constante $g\ (y)$, la constante depende de y.

Si integro (**2**) con respecto a y tengo que sumar una constante $g(x)$, la constante depende de x.

Se integra (1)y (2) .Además se busca una función que complemente la ecuación.

La ecuación (**3**) es la solución, falta encontrar $g(y)$

Para encontrar $g\ (y)$ derivo la ecuación (**3**) con respecto a y porque la constante depende de y.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2x^2y + g'(y) \quad (4)$$

Igualado a (4) y (2) se obtiene

$$2x^2\mathrm{y} + \mathrm{g}'(\mathrm{y}) \quad = \quad 2x^2y - 3$$

$$\mathrm{g}'(\mathrm{y}) \quad = \quad -3$$

Como la constante depende de y , entonces se integra con respecto a y:

$$\frac{\mathrm{D}\varphi}{dy} \quad = \quad -3$$

$$d\varphi = -3\,dy \quad (\mathbf{5})$$

$$\int d\varphi = \int -3dy$$

$$\varphi = -3\mathrm{y} \quad (\mathbf{6})$$

Recordemos que:

$$\varphi(x,y) = \mathrm{c} \quad (\mathbf{7})$$

Remplazando (6) y (7) en (3):

$$c = x^2y^2 + 2\mathrm{x} - 3\mathrm{y}$$

Para que sea exacta debe cumplir con:

$$\frac{\partial \mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Para la solución:

$$\frac{\partial\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial x}=M(x,y)$$

Resumen:

Sea:

$$\varphi(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy=c$$

Para que sea una ecuación diferencial exacta se debe cumplir con la condición:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial y}=N(x,y)\ \ (\mathbf{1})$$

$$\frac{\partial\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial x}=M(x,y)\ \ (\mathbf{2})$$

En (2) se despeja:

$$\partial\varphi(x,y)=M(x,y)\partial x\ (\mathbf{3})$$

Luego se integra (3) en este momento sumo una constante $g\ (y)$:

$$\int\partial\,\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y})=\int M\,(\mathrm{x},\mathrm{y})dx+g(y)$$

$$\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y})\ =\int M\,(\mathrm{x},\mathrm{y})dx+g(y)\quad(\mathbf{4})$$

La ecuación (4) será la solución, solo queda por hallar $g\ (y)$.

Para encontrar $g(y)$ se deriva (4) con respecto a y :

$$\frac{\partial\varphi(\mathrm{x,y})}{\partial y} = (\int M(x,y)dx)' + g'(y) \qquad \textbf{(5)}$$

Se iguala (5) y (1) :

$$(\int M(x,y)dx)' + g'(y) = N(x,y) \quad \textbf{(6)}$$

Se despeja $g'(y)$ en (6):

$$g'(y) = N(x,y) - (\int M(x,y)dx)' \quad \textbf{(7)}$$

Se integra (7) :

$$g(y) = \int [N(x,y) - (\int M\,(\,x,y)dx)'\,]\,dy \quad \textbf{(8)}$$

Como:

$$\varphi(x,y) = c \quad \textbf{(9)}$$

Se procede a reemplazar (8) y (9) en (4) obteniendo la solución. Se puede lograr lo mismo si se integra (2) en este paso se tiene que sumar una constante $g(x)$. Para encontrar $g\ (x)$ derivo con respecto a x y luego se iguala con (1).

Ejercicio 1.10.1

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

Se verifica si la ecuación diferencial es exacta:

$M = 3x^2 + 6xy^2$ $\qquad$ M se toma con el dx.

$N = 6x^2y + 4y^3$ $\qquad$ N se toma con el dy.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 12xy$$

Como son iguales entonces es exacta.

Solución:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M(x,y) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \ (\mathbf{1})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x,y) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3 \quad (\mathbf{2})$$

Se integra (2) con respecto a y:

$$\int \partial\varphi = \int 6\,x^2y dy + \int 4\,y^3 dy$$

$$\varphi(x,y) = 3x^2y^2 + y^4 + g(x) \ \ (\mathbf{3})$$

Se deriva (3) con respecto a x:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 6xy^2 + g'(x)\ (\mathbf{4})$$

Se iguala (4) y (1) :

$$6x\cancel{y^2} + g'(x) = 3x^2 + 6\cancel{x}y^2$$

$$g'(x) = 3x^2 \quad \rightarrow \quad (\mathbf{5})$$

Se integra (5) con respecto a x:

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = 3x^2$$

$$\partial g(x) = 3x^2 \partial x$$

$$\int \partial g(x) = 3 \int x^2 \partial x$$

$$g(x) = x^3 + c \quad (\mathbf{6})$$

C es relevante puesto que se considera una constante que es igual a $\varphi(x, y)$, como se indica a continuación:

$$\varphi(x, y) = c \qquad (\mathbf{7})$$

Se reamplaza(7) y (6) en (3):

$$c = 3x^2y^2 + y^4 + x^3$$

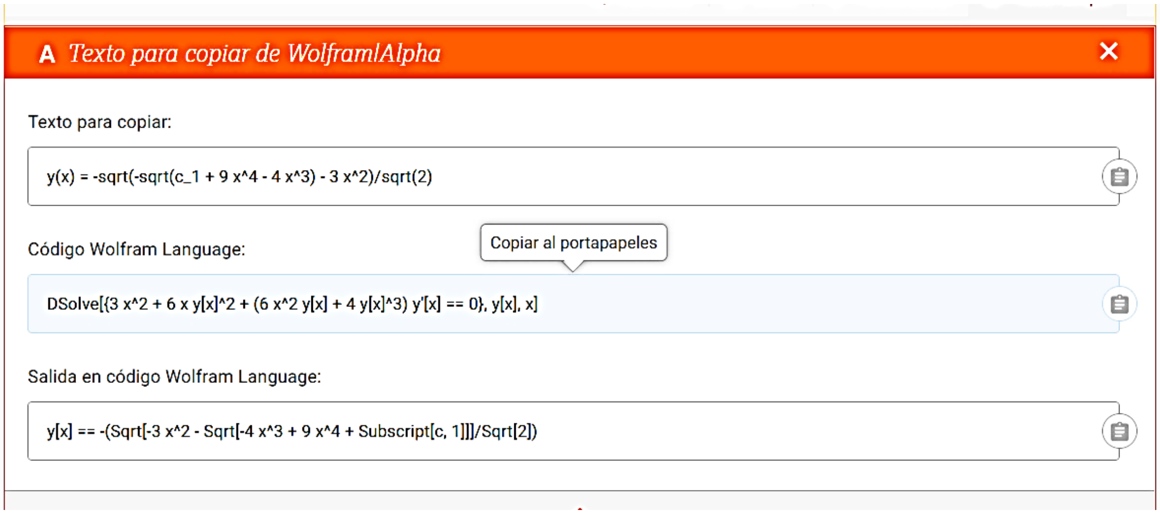


Figura 8. La solución en wólfram Alpha

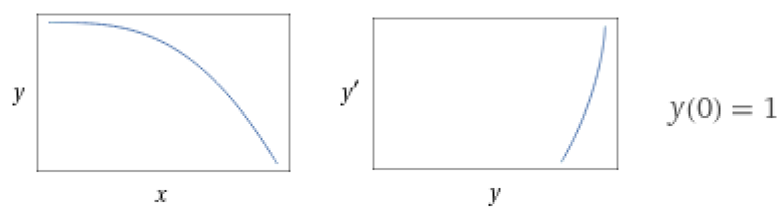


Figura 9. Gráfica de soluciones individual de muestra

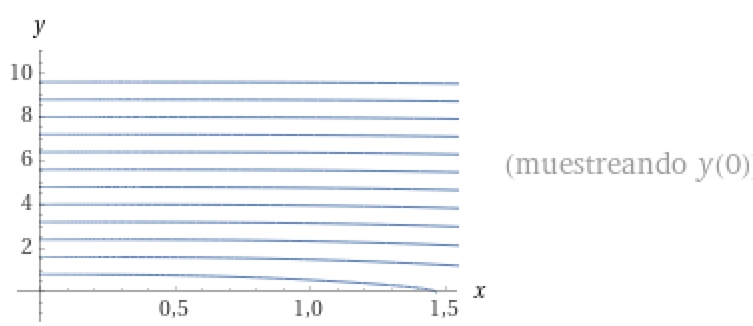


Figura 10. Familia de soluciones de muestra

Ejercicio 1.10.2

Dada la ecuación diferencial, encontrar su solución:

$$\left(\frac{sen\ 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{sen^2x}{y^2}\right)dy=0$$

Se identifica las funciones $M(x,y) y\ N(x,y)$:

$$M(x,y)=\ \frac{sen\ 2x}{y}+x \qquad N(x,y)=\ \ y-\frac{sen^2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{y\ \frac{d}{dy}\ (sen^2x)-sen^2x\ \frac{d}{dy}(y)}{y^2}$$

Las derivadas son cero porque corresponden a constantes en la derivada parcial.

La igualdad trigonométrica $2sen\ x\ cos\ x\ = sen2x$ se aplica en la siguiente expresión:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{1}{y^2}2\ senx\ \frac{d}{dx}\ (senx)$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{1}{y^2}2sen\ x\ cos\ x$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=-\frac{sen\ 2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{y^2}\left[\frac{d}{dx}(sen^2x)\right]+sen^2x\ \left[\frac{d}{dx}(\frac{1}{y^2})\right]$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-\frac{2senxcosx}{y^2}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\frac{sen\ 2x}{y} \quad como \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial y} \rightarrow es\ exacta$$

Solución:

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = M$$

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = N$$

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = \frac{sen\ 2x}{y} + x$$

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = y - \frac{sen\ 2x}{y}$$

Se Integra (1) con respecto a x:

$$\varphi(x,y) = (\frac{1}{y})(\frac{1}{2})(-\cos 2x\ ) + \frac{x^2}{2} + g\ (y) \quad (\mathbf{3})$$

Derivo (3) con respecto a y:

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{cos\ 2x}{2y^2} = g´(y)$$

Igualo con (2):

$$g'(y) + \frac{cos\ 2x}{2y^2} = y - \frac{sen\ ^2x}{y^2}$$

Como $cos\ 2x = 1 - 2sen^2\ x$:

$$g'(y) + \frac{1 - 2sen^2x}{2y^2} = y - \frac{sen^2x}{y^2}$$

$$g´(y) + \frac{1}{2y^2} - \frac{sen^2x}{y^2} = y - \frac{sen^2x}{y^2}$$

$$g´(y) = \frac{y}{1} - \frac{1}{2y^2}; \quad g(y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y}$$

$$\int g´(y) = \int ydy - \frac{1}{2}(\int y^{-2}\,dy)$$

$$g(y) = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}(\frac{y}{-1}^{-1})$$

$$g(y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y} \qquad (\mathbf{5})$$

Como:

$$\varphi(x, y) = c \quad \rightarrow \quad (\mathbf{6})$$

Reemplazo 5 y 6 en 3:

$$c = -\frac{1}{2y}cos2x + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y}$$

$$c = \frac{-\cos 2x + x^2 + y^3 + 1}{2y} \quad \rightarrow \text{ Solución}$$

CAPÍTULO II

FACTOR INTEGRANTE

Si la ecuación del tipo, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ **(1)** no es exacta, para que se transforme en una ecuación exacta, se multiplica por una función $u = (x,y)$ (**2**) llamada factor integrante.

Suponga que $M\,dx + Ndy = 0 \rightarrow no\ es\ exacta$ y $u = (x,y)$ factor integrante

Multiplicamos (1) y (2):

$$u(x,y)M(x,y)dx + u(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0 \quad \text{es exacta}$$

Como es exacta entonces cumple con:

$$\frac{\partial}{\partial y}[u(x,y)Mdx] = \frac{\partial}{\partial x}[u(x,y)N(x,y)dy]$$

Derivado se tiene:

$$u(x,y)\frac{\partial M\,(x,y)}{\partial y} + M\,(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = u(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} + N\,(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$M\,(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} - N\,(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} = u(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - u(x,y)\frac{\partial M\,(x,y)}{\partial y}$$

$$u(x,y)\left[\frac{\partial N\,(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right] = M(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} - N\,(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$N\,\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y} = u[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}] \quad (\boldsymbol{A})$$

A continuación se muestra otro método para encontrar el factor integrante.

PRIMER CASO: es suponer que $u = u(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

SEGUNDO CASO: es suponer que $u = u(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$$u = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$ Esto se aplica solo si está en función de x $(\boldsymbol{B})$

$$u = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}}{N} dy}$$ Esto se aplica solo si está en función de y $(\boldsymbol{C})$

Ejercicio 2.0.1

Dada la ecuación diferencial $x^4y^2dx + x^5ydy = 0$, encontrar su solución.

Se realiza el cálculo de las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial M}{\partial x};\frac{\partial N}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial M}{\partial y};\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M(x,y) = x^4y^2 \qquad\qquad N(x,y) = x^5y$$

Para verificar si alguna derivada parcial cumple la igualdad que determine la condición de una ecuación diferencial exacta.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x^4y \quad (\mathbf{1})$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 5x^4y \quad (\mathbf{2})$$

Esta expresión no representa una igualdad por tanto, se procede a buscar el factor integrante.

Sustituimos (1) y (2) en (A) también M y N:

$$N\ \frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y} = u[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}] \quad (\mathbf{A})$$

$$x^5y\frac{\partial u}{\partial x} - x^4y^2\frac{\partial u}{\partial y} = u\ [\ 2x^4y - 5x^4y]$$

$$x^5y\frac{\partial u}{\partial x} - x^4y^2\frac{\partial u}{\partial y} = -3x^4yu$$

Está expresión se la divide por x^4y :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = -3u \qquad (\mathbf{3})$$

Como: $u\acute{}(t) = u\ \partial(t)$ ó $u(t) = u(x(t)y(t))$

Derivando se tiene:

$$u\acute{}(t) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (\mathbf{4})$$

Comprando (3)y (4):

$$\frac{du}{dt} = -3u \quad (\boldsymbol{i})$$

$$\frac{dx}{dt} = x \qquad (\boldsymbol{ii})$$

$$\frac{dy}{dt} = -\mathrm{y} \qquad (\mathbf{iii})$$

La ecuación (3) se puede expresar como:

$$3u = y\frac{\partial u}{\partial y} - x\frac{\partial u}{\partial x}$$

Entonces:

$$\frac{dx}{dt} = -x \quad (\boldsymbol{i})$$

$$dx = -xdt$$

$$\frac{dy}{dt} = y \quad (\boldsymbol{ii})$$

$$dy = ydt$$

$$\frac{du}{dt} = 3u \quad (\boldsymbol{iii})$$

$$dy = 3udt$$

Ó

$$\frac{dx}{x} = -dt \quad (\boldsymbol{i})$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int dt$$

$$lnx = -t + lnc_1$$

$$\frac{dy}{y} = dt \quad (\boldsymbol{ii})$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dt$$

$$lny = t + lnc_2$$

$$\frac{du}{u} = 3dt \quad (\boldsymbol{iii})$$

$$\int \frac{du}{u} = 3\int dt$$

$$lnu = 3t + lnc_3$$

De $(\boldsymbol{i})$ $\quad c_1e^{-t} = x$

De $(\boldsymbol{ii})$ $\quad c_2e^{t} = y$

De $(\boldsymbol{iii})$ $\quad c_3e^{3t} = u$

Por la propiedad de los logaritmos donde $ln\, N = x \Rightarrow e^x = N$

las constantes $c_1 = 0, c_2 = 1\ y\ c_3 = 1$

se reemplaza en $u = c_3e^{3t}$

$$u = e^{3t}$$

Reemplazando $lny = t$ se obtiene:

$$u = e^{3\,lny}$$

$$u = e^{lny^3} \quad (\boldsymbol{iv})$$

Nota: Por propiedad de los logaritmos $a^x = e^{xlna} = e^{lna^x}$, se tiene:

$$e^{3\,lny} = y^3$$

$$u = y^3$$

Como $ln\,N = x \Rightarrow e^x = N$ aplicando esta propiedad en $(\boldsymbol{iv})$ tenemos como factor integrante :

$$ln\,u = lny^3$$

$$\boldsymbol{u = y^3}$$

Podemos calcular otro factor integrante de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = e^{-t} \text{ y } \quad u = e^{3t}$$

Como: $lnx = -t \Rightarrow u = e^{-3\,lnx}$

$=> u = x^{-3}$ Este es otro factor integrante.

Con el factor integrante obtenido se multiplica la ecuación diferencial obtenida y se tiene una ecuación diferencial exacta.

$$(x^4y^2dx + x^5y\,dy = 0)x^{-3}$$

$$xy^2dx + x^2y\,dy = 0 \quad (\boldsymbol{A})$$

Con la expresión (A) se comprueba que es exacta:

$$M = xy^2 \;\; y \quad N = x^2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$$

Esta condición muestra que la ED es exacta

Resolviendo la ecuación exacta (A) se tiene:

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x} = xy^2 \quad (\mathbf{1})$$

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} = N \qquad \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} = x^2y \quad (\mathbf{2})$$

De (1), $\partial\varphi = xy^2dx$ esta expresión se integra con respecto a x :

$$\int \partial\varphi = y^2 \int xdx$$

$$\varphi = \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y) \quad (\boldsymbol{B})$$

Se debe encontrar $g(y)$, para ello derivo con respecto a y para comparar $(\mathbf{2})$:

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} = x^2y + g'(y) \quad (\boldsymbol{C})$$

(C) comparo con (2):

$$\cancel{x^2y} + g'(y) = \cancel{x^2y}$$

$$g'(y) = 0$$

Integro con respecto a y :

$$\int g'(y) = \int 0dy$$

$$g(y) = c \quad (\mathbf{3})$$

Reemplazo (3) en (B) :

$$\varphi = \frac{1}{2}x^2y^2 + c$$

Como $\varphi = (x, y) = c$ se tiene:

$$\frac{1}{2}x^2y^2 = c$$

Ahora se encuentra el factor integrante por el otro método:

$$u = u(x)$$

$$u = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial Y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx} \quad \textbf{(1)}$$

$$u = u(y)$$

$$u = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial X} - \frac{\partial M}{\partial Y}}{M} dy} \quad \textbf{(2)}$$

Utilizando el mismo ejemplo

$$x^4y^2dx + x^5\ y\ \ dy = 0$$

$$(\boldsymbol{C}) \quad M = x^4y^2 \qquad\qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x^4y \quad (\boldsymbol{A})$$

$$(\boldsymbol{D}) \quad N = x^5 \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = ax^4y \quad (\boldsymbol{B})$$

Reemplazo (D); (A) y (B) en (1):

$$u = e^{\int \frac{2x^4y - 5x^4y}{x^5}}$$

$$u = e^{\int -3x^{-1}dx}$$

$$u = e^{-3\int \frac{dx}{x}}$$

$$u = e^{-3lnx}$$

Integrando se obtiene:

$$u = e^{lnx^{-3}}$$

$$lnN = x$$

$$e^x = N$$

Aplicando logaritmos a los dos lados de la igualdad y por propiedad de logaritmos se consigue.

$$Ln|u| = lne^{lnx^{-3}}$$

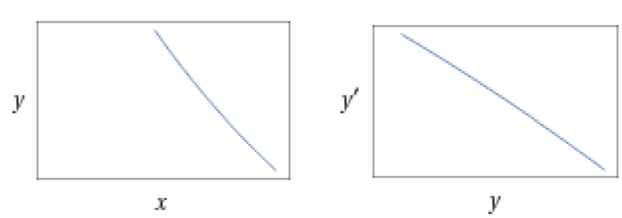
$$ln|u| = lnx^{-3}.lne$$

(Si $\ln e = 1$) se obtiene:

$$ln|u| = lnx^{-3}$$

Por lo tanto:

$$u = x^{-3}$$



$y(1) = 1$

Figura 11. Gráficos de solución individual de muestra

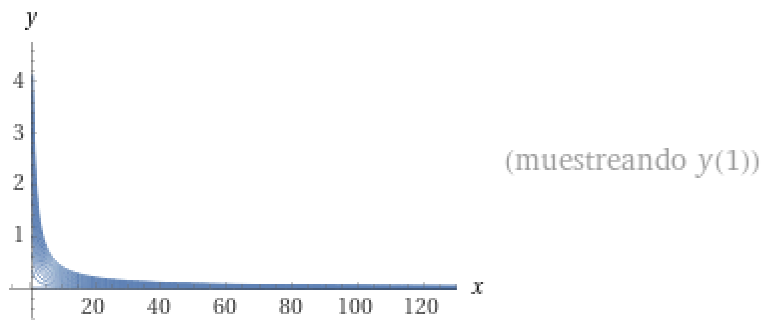


Figura 12. Familia de soluciones de la muestra

Ejercicio 2.0.2

$$(x + y^2)dx - 2xdy = 0 \qquad (\boldsymbol{A})$$

$$M = x + y^2 \qquad y \qquad N = -2xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \qquad (\mathbf{1}) \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2y \qquad (\mathbf{2})$$

Las ecuaciones ≠ (2) por lo tanto, no cumple la condición y la ecuación diferencial por no es no es exacta

Calculamos el factor integrante:

$$u = u(x)$$

$$u = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial Y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

$$u = e^{\int \frac{2y-(-2y)}{-2xy} dx}$$

$$u = e^{\int -\frac{2}{x} dx}$$

$$= e^{-2\int\frac{dx}{x}}$$

$$u = e^{lnx^{-2}}$$

$$u = x^{-2} \;\; (\mathbf{3}) \;\; factor\ integrante$$

$(\boldsymbol{A})$ se multiplica por $(\mathbf{3})$:

$$x^{-2}(x + y^2)dx - x^{-2}2yxdy = 0$$

$$(x^{-1} + x^{-2}y^2)dx - 2x^{-1}\,y\,dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - \frac{2y}{x}dy = 0 \qquad (\mathbf{4})$$

Comprobando que (4) sea exacta:

$$M = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2} \qquad\qquad N = -\frac{2y}{x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2y}{x^2} \qquad (\mathbf{5}) \quad ; \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2y}{x^2} \qquad (\mathbf{6})$$

Como $(\mathbf{5}) = (\mathbf{6})$ entonces la ecuación $(\mathbf{4})$ es exacta.

Solución de la ecuación $(\mathbf{4})$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M \qquad\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2} \qquad (\mathbf{7})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N \qquad\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{2y}{x} \qquad (\mathbf{8})$$

Se integra (8) en forma parcial con respecto a y:

$$\int \partial\varphi = -\frac{2}{x}\int y\partial y$$

$$\varphi = -\frac{y^2}{x} + g(x) \qquad (\mathbf{9})$$

Esta es la solución, donde se deriva (9) con respecto a x:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -y^2\, D_x\left(\frac{1}{x}\right) + g'(x) = -y^2\left(\frac{xD_x(1) - 1D_x(x)}{x^2}\right) + g'(x)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y^2}{x^2} + g'^{(x)} \qquad (\mathbf{10})$$

Igualando (10) con (7) se obtiene:

$$g'(x) + \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$g'^{(x)} = \frac{1}{x}$$

Integrando con respecto a x:

$$\int g'^{(x)} = \int \frac{1}{x}\partial x$$

$$g(x) = \ln(x) \qquad (\mathbf{11})$$

Reemplazando (11) en (9):

$$\varphi = -\frac{y^2}{x} + lnx$$

Por tanto se tiene:

$$Lnx - \frac{y^2}{x} = C$$

$$ln\frac{x}{C} = \frac{y^2}{x}$$

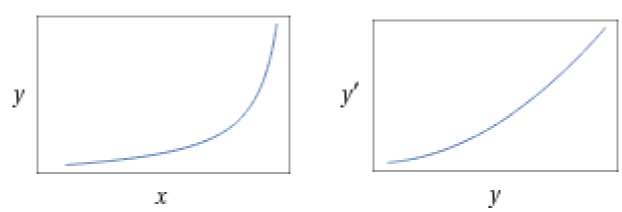
$$xlnx = y^2$$

Aplicando propiedades de logaritmos se tiene:

$$ln\left(\frac{x}{C}\right)^x = y^2$$

Su solución es:

$$\left(\frac{x}{C}\right)^x = e^{y^2}$$



$y(1) = 1$

Figura 13. Gráfica de Solución individual de muestra

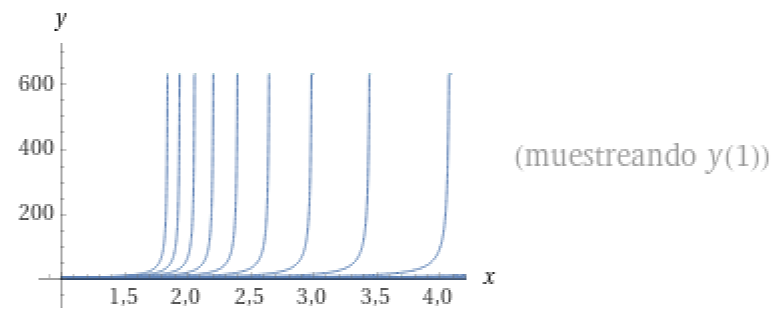


Figura 14. Familia de soluciones de muestra

Ejercicio 2.0.3

$$3x\,(xy-2)\,dx+\left(x^3+24\right)dy=0 \qquad (\boldsymbol{A})$$

$$M=3x^2y-6x \qquad\qquad N=x^3+2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2 \quad (\mathbf{1}) \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2 \quad (\mathbf{2})$$

Cómo $(1)=(2)$ son semejantes (A) es exacta

Solución:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=M(x,y) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=3x^2y-6x \qquad (\mathbf{3})$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=N(x,y) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=x^3+2y \qquad (\mathbf{4})$$

Integro (4) con respecto a y:

$$\int \partial\varphi=\int x^3\,\partial y+2\int y\partial y\;+g(x)$$

$$\varphi=y^2+g(x) \qquad (B\,)$$

Cálculo de $g(x)$, para esto se deriva (B) con respecto a x:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = g'^{(x)} \qquad \textbf{(5)}$$

Igualando **(5)** con **(3):**

$$g'^{(x)} = 3x^2y - 6x \qquad \textbf{(6)}$$

Integrando con respecto a x:

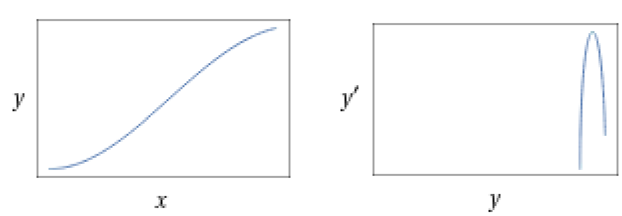
$$\int g'(x) = 3y \int x^2\,dx - 6 \int xdx$$

$$g(x) = x^3y - 3x^2 + c \qquad \textbf{(8)}$$

Reemplazando (8) en (B):

$$\varphi(x, y) = y^2 + x^3y - 3x^2 + c = 0$$

$$y^2 + x^3y - 3x^2 = c$$



$y(0) = 1$

Figura 15. Gráficos de solución individual de muestra

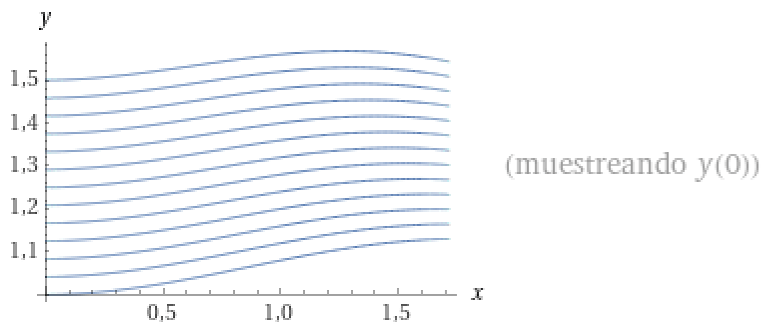


Figura 16. Familia de soluciones de la muestra

2.1 Modelo Matemático aplicado a Factor Integrante

Ejemplo 1: Curva de Flexión Optimizada para Vigas

Problema:

En el diseño de una viga para un puente innovador, se requiere determinar una curva que pase por el punto (1, 2) de modo que la pendiente de la tangente en cualquier punto (x, y) de la curva sea igual al doble de la coordenada x de ese punto, menos la mitad de su coordenada y. Esta relación se utiliza para optimizar la distribución de tensiones a lo largo de la viga. Formule la ecuación diferencial que describe esta curva y resuélvala.

Solución:

La pendiente de la tangente en cualquier punto de la curva está dada por $\frac{dy}{dx}$ Según las condiciones del problema, podemos escribir:

$$\frac{dy}{dx} = 2x - \left(\frac{1}{2}\right)y$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden. Para resolverla, podemos utilizar el método de factores integrantes:

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{2}\right)y = 2x$$

El factor integrante es

$$e^{(\int (1/2)dx)} = e^{(x/2)}$$

Multiplicando ambos lados por $e^{(x/2)}$:

$$e^{(x/2)}\frac{dy}{dx} + (\frac{1}{2})e^{(x/2)}y = 2xe^{(x/2)}$$

La parte izquierda es la derivada de $e^{(x/2)}y$, por lo que se tiene:

$$\frac{d}{dx}(e^{(x/2)}y) = 2xe^{(x/2)}$$

Integrando ambos lados:

$$e^{(x/2)}y = 4xe^{(x/2)} - 4e^{(x/2)} + C$$

Despejando y:

$$y = 4x - 4 + Ce^{(-x/2)}$$

Usando la condición inicial $(1, 2)$:

$$2 = 4(1) - 4 + Ce^{(-1/2)}$$

$$C = 2e^{(1/2)}$$

Por lo tanto, la ecuación de la curva es:

$$y = 4x - 4 + 2e^{(1/2-x/2)}$$

Esta curva representa la forma óptima de la viga para la distribución de tensiones a lo largo de la misma.

Ejercicios propuestos sección 2.

1. $xy' + 2y = x^3$ Resp. $y(x) = \frac{c_1}{x^2} + \frac{x^3}{5}$

2. $y' + \frac{1}{x}y = sen(x)$ Resp. $y(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - \cos(x)$

3. $2xy' + y = x^2 e^x$ Resp. $y = x^2 e^x - Ce^{-\frac{x^2}{2}}$

4. $y' - 2xy = \frac{1}{x}$ Resp. $y = \frac{C}{x^2} + \frac{1}{4}e^{x^2}$

5. $y' + ytan(x) = sec(x)$ Resp. $y = C\sec(x) - \ln|\sec(x) + \tan(x)|$

2.2 Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden

Una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ (**A**), se denomina ecuación diferencial lineal de primer orden.

Condiciones donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios:

$si\ Q(X) \neq 0$, la ecuación (A) se denomina **ecuación diferencial lineal no homogénea**.

$si\ Q(X) = 0$, la ecuación (A) se denomina **ecuación diferencial lineal homogénea.**

Toda ecuación diferencial lineal homogénea es de variables separables y su solución general tiene la forma [22].

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -P(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$$

$$lny = -\int P(x)dx$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}$$

$$y = ce^{-\int P(x)dx} \quad \text{(Solución general de la homogénea)}$$

2.3 Resolución de Ecuaciones Diferenciales Lineales no Homogéneas

La resolución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas se lo realiza por el método conocido como variación de la constante:

1. Dada la ecuación diferencial lineal no homogénea, se resuelve a partir de la condision de una ecuación diferencial homogénea, es decir si :

   Q(x) = 0

   $$y = Ce^{-\int P_{(x)}dx} \textbf{ (A)}$$

2. Suponemos que la constante es una función de ***x:***

   $$C = C(x) \Rightarrow \text{Esto en } (\boldsymbol{B})$$

   Luego se obtiene:

   $$y = C(x)e^{-\int P_{(x)}dx}(\boldsymbol{C})$$

   Esta es la solución general de la ecuación lineal no homogénea.

   Entonces solo queda por conocer $C(x)$

3. Para halla $C(x)$ se deriva $(\boldsymbol{C})$ con respecto a ***x:***

$$\frac{dy}{dx} = C(x)D_x\left[e^{-\int P_{(x)}dx}\right] + e^{-\int P_{(x)}dx}D_x[C(x)]$$

$$\frac{dy}{dx} = C(x)e^{-\int P_{(x)}dx}D_x\left[-\int P_{(x)}\,dx\right] + e^{-\int P_{(x)}dx}C'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = C(x)e^{-\int P_{(x)}dx}\left[-P_{(x)}\right] + e^{-\int P_{(x)}dx}C'(x) \qquad (\boldsymbol{D})$$

Nota: Recordar que:

$$D_{(x)}(e^x) = e^x D_{(x)}[x]$$

y;

$$D_{(x)}\left(\int dx\right) = x$$

4. Remplazando (C) y (D) en (A): DONDE ESTA A

$$\cancel{C(x)e^{-\int P_{(x)}dx}}[-P_{(x)}] + e^{-\int P_{(x)}dx}C'(x) + \cancel{P_{(x)}}C(x)e^{-\int P_{(x)}dx} = Q_{(x)}$$

Por tanto se tiene:

$$e^{-\int P_{(x)}dx}C'(x) = Q_{(x)}$$

Despejando $C'(x)$ se tiene:

$$C'(x) = \frac{Q_{(x)}}{e^{-\int P_{(x)}dx}}$$

$$C'(x) = e^{\int P_{(x)}dx}Q_{(x)}$$

Aplicando integrales a esta expresión resulta:

$$\int C'(x) = \int e^{\int P_{(x)}dx}Q_{(x)}\,dx + C$$

$$C(x) = \int Q_{(x)}e^{\int P_{(x)}dx}dx + C \quad (\boldsymbol{E})$$

Luego se remplaza la ecuación (E) en (C) y se obtiene la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogenea.

$$y = [\int Q_{(x)}e^{\int P_{(x)}dx} + C]e^{-\int P_{(x)}dx}$$

Nota: también se puede llegar a esta solución a través del factor integrante.

Como la ecuación diferencial lineal no es homogénea no es exacta.

$$\frac{dy}{dx} + P_{(x)}y = Q_{(x)}$$

Y para transformarla en una ecuación diferencial exacta se la multiplica por un factor integrante de la forma:

$$u = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

Considerando que una ecuación diferencial para que sea exacta debe cumplir con la siguiente expresión:

$$M(x, y) + N(x, y) = 0$$

Se debe proceder primero con la obtención de la solución general de la ecuación diferencial **(A):**

$$y' + P_{(x)}y - Q_{(x)} = 0$$

En esta caso:

$$N(x, y) = 1$$

$$M(x, y) = P_{(x)}y - Q_{(x)}$$

Esto porque, N tiene dy y $M\ tiene\ dx$

$$\frac{dy}{dx} + P_{(x)} - Q_{(x)} = 0$$

$$dy + \left[P_{(x)}y - Q_{(x)}\right]dx = 0$$

Aplicando la derivada parcial se obtiene:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = D_y\left[P_{(x)}y\right] - D_y\left[Q_{(x)}\right]$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P_{(x)}D_y(y) = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P_{(x)}$$

Para la derivada parcial de $N(x, y)$ se tiene:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = D_x(1) \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

Luego la expresión del factor integrante queda:

$$u = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

$$u = e^{\int \frac{P_{(x)} - 0}{1} dx}$$

$$\boldsymbol{u = e^{\int P_{(x)}\, dx}}$$

Este factor integrante se lo multiplica a la ecuación diferencial (A):

$$e^{\int P_{(x)}\, dx}(y') + e^{\int P_{(x)}\, dx}\left[P_{(x)}y\right] = e^{\int P_{(x)}\, dx}\left[Q_{(x)}\right]$$

Integrando tenemos:

$$\int D_x\left[e^{\int P_{(x)}\, dx}y\right] = \int Q_{(x)}e^{\int P_{(x)}\, dx}dx + C$$

$$e^{\int P_{(x)}\,dx}y = \int Q_{(x)}e^{\int P_{(x)}\,dx}dx + C$$

$$y = e^{-\int P_{(x)}\,dx}[\int Q_{(x)}e^{\int P_{(x)}\,dx}dx + C]$$

Ejercicio 2.3.1

Dada la ecuación diferencial que muestra la secuencia de un cuircuito provisto con inductancia y resistencia obteniendo un potencial eléctrico con valores iniciales $i(0) = 0, E(t) = sen(wt), w\ es\ cte. R = 2\Omega, L = 1H(henrio)$**.**

$$\boldsymbol{L\frac{dI}{dt} + Ri = E_{(t)}} \quad (\boldsymbol{A})$$

Se realiza el reemplazo:

$\frac{di}{dt} + 2i = sen(wt)\ (\boldsymbol{B})$ → esta es una ecuación diferencial lineal no homogénea

Resuelvo la ecación diferecial homogénea:

$$\frac{di}{dt} + 2i = 0$$

Donde:

$$\frac{di}{i} = -2idt$$

Despejamos i y se realiza la integración correspondiente en función de t:

$$i = C(t)e^{-2t}(\boldsymbol{C})$$

Se debe encontrar el valor de ***C(t),*** para eso derivo (C) con respecto a ***t:***

$$\frac{di}{dt} = D_t\ [C(t)e^{-2t}]$$

$$\frac{di}{dt} = C(t)D_t\ [e^{-2t}] + e^{-2t}D_t\ [C(t)]$$

$$\frac{di}{dt} = C(t)\ [e^{-2t}D_t(-2t)] + e^{-2t}C'(t)$$

$$\frac{di}{dt} = C(t)\ [-2e^{-2t}] + e^{-2t}C'(t)]$$

$$\frac{di}{dt} = \quad -2C(t)\, e^{-2t} + e^{-2t}C'(t) \quad (D)$$

Reemplazando (C) y (D) en (B):

$$\cancel{-2c(t)\, e^{-2t}} + e^{-2t}C'(t) + \cancel{2C(t)\, e^{-2t}} = sen\ wt$$

$$e^{-2t}C'(t) = sen\ wt$$

$$C'(t) = \ e^{2t}sen\ wt$$

Integrando se tiene:

$$\int C'(t)\ dx = \int\ e^{2t}sen\ wt$$

Integrando por partes y realizando las sustituciones correspondientes se obtine:

$$u = sen\ wt\ \rightarrow \frac{du}{dt} = wCos\ (wt)$$

$$du = \ wcos(wt)dt$$

$$dv \ = \ e^{2t}dt$$

$$\int dv \ = \ \int \ e^{2t}dt$$

$$V = \ e^{2t}/2$$

$$C(t) \ = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \ e^{2t} sen\ wt \ - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \int \ e^{2t} w\ coswt\ dt$$

$$C(t) \ = \frac{1}{2} \ e^{2t} sen\ wt \ - \frac{1}{2} w \int \ e^{2t} coswt\ dt$$

Se realiza una nueva integración por partes y se tiene:

$$\int sen\ wt \ \ e^{2t}dt \ = \ e^{2t} \frac{sen\ wt}{2} - \frac{w}{2} \int \ e^{2t} \ coswt\ dt$$

Se consigue la sustitución correspondiente:

$$u = \ cos\ wt \rightarrow \quad du \ = \ -w\ sen\ wt\ dx$$

$$dv = \ e^{2t}dt$$

$$v = \frac{1}{2} \ e^{t}$$

$$\int sen\ wt \ \ e^{2t}dt \ = \frac{sen\ wt}{2} \ \ e^{2t} - \frac{w}{2} \left[\frac{cos\ wt \ \ e^{2t}}{2} + \frac{w}{2} \int \ e^{2t} \ senwt\ dt\right]$$

$$\int sen\ wt \ \ e^{2t}dt \ = \frac{sen\ w}{2} \ \ e^{2t} - \frac{w\ cos\ wt \ \ e^{2t}}{4} - \frac{wt}{4} \int \ e^{2t} \ senwt\ dt$$

$$\int sen\,wt\;\; e^{2t}\text{dt}\;\; + \frac{wt}{4}\int\; e^{2t}\; senwt\; dt = \frac{sen\,wt\;\; e^{2t}}{2} - \frac{w\,e^{2t}\,cos\,wt}{4}$$

$$(1 + \frac{wt}{4})\int senwt\;\; e^{2t}\; dt\;\; = \frac{e^{2t}\,sen\,wt}{2} - \frac{w\,e^{2t}\,cos\,wt}{4} + c$$

$$\int\; e^{2t}\; senwt\; dt = \frac{\frac{e^{2t}\,sen\,wt}{2}}{\frac{4+wt}{4}} - \frac{\frac{w\,e^{2t}\,cos\,wt}{4}}{\frac{4+wt}{4}} + c$$

$$\int\; e^{2t}\; senwt\; dt = \frac{2\,e^{2t}\,sen\,wt}{4+wt} - \frac{w\,e^{2t}\,cos\,wt}{4+wt}\;\; + c$$

$$\int\; e^{2t}\; senwt\; dt = \frac{2\,e^{2t}}{4+wt}\,[sen\,wt - \frac{w}{2}\; cos\; wt\;\;] + c$$

Por tanto se tiene:

$$C(t)\;\; = \;\; \frac{2\,e^{2t}}{4+wt}\left[sen\,wt - \frac{w}{2}\; cos\; wt\;\; \right] + \;c \qquad (E)$$

Se realiza el siguiente reemplazo (E) en (C):

$$i(t)\;\; = \left[\frac{2\,e^{2t}}{4+wt}[sen\,wt - \frac{w}{2}\; cos\; wt] + \;c\right]\; e^{-2t}$$

$$i(t)\;\; = \frac{2\,e^{2t}\,.\,e^{-2t}}{4+wt}\left[sen\,wt - \frac{w}{2}\; cos\; wt\right]\; + \;\text{c}\,e^{-2t}$$

$$i(t)\;\; = \frac{2}{4+w^2}\left[sen\,wt - \frac{w}{2}\; cos\; wt\right]\; + \;\text{c}\,e^{-2t} \qquad (F)$$

Para buscar la constante uso las condiciones iniciales dadas en el problema:

$$i(0) = 0 = -\frac{w}{4+w^2} + \text{c} \rightarrow c = \frac{w}{4+w^2}$$ → esta condición se reemplaza en $(\boldsymbol{F})$

$$\boldsymbol{i(t)} = \frac{\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{4+w^2}} \boldsymbol{e^{-2t}} + \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{4+w^2}} \left[sen\ wt - \frac{w}{2} \cos wt\right]$$

2.4 Aplicaciones de las Ecuaciónes Diferenciales Ordinarias

Las ecuaciones diferenciales se aplican en distintos movimientos entorno al equilibrio, como en la existencia de la fuerza centrípeta que se produce cuando un móvil acelera sobre una trayectoria circular.

En el estudio de un muelle cuyo análisis se realiza con respecto al mismo y sus diferentes posiciones, que tiene una particularidad debido al material que esta construido, recuperando su longitud inicial después de estirarlo[23].

Otro estudio de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias hace referencia al analisis de la constante de elasticidad. Además podemos citar otro ejemplo con el comportamiento del péndulo respecto a su movimiento, el mismo que presenta tres casos: en la ausencia de rozamiento, en el péndulo sometido y en el péndulo de fuerza extrema [24].

2.4.1 Modelado de ecuaciones diferenciales aplicadas a ingeniería

En esta sección se presenta una serie de problemas aplicados a ingeniería deducidos mediante ecuaciones diferenciales

1. **Mezcla de Nutrientes en un Tanque de Cultivo**

Imagina un tanque de cultivo hidropónico que inicialmente contiene 500 litros de solución nutritiva. Esta solución tiene cierta concentración de nutrientes esenciales para el crecimiento de las plantas. Una nueva solución nutritiva se añade al tanque a una tasa de 4 litros por minuto, con una concentración de nutrientes de 5 gramos por litro. La solución en el tanque se mezcla uniformemente y sale a la misma tasa a la que entra.

Planteamiento del Problema:

Sea $N(t)$ la cantidad de nutrientes (en gramos) en el tanque en el tiempo t, queremos encontrar la ecuación diferencial que describe cómo cambia $N(t)$ con el tiempo.

Ecuación de Entrada:

La cantidad de nutrientes que entra por minuto es $\frac{4 litros}{min} * \frac{5g}{litro} = 20g/min$

Ecuación de Salida:

Supóngase que la concentración de nutrientes en el tanque en el tiempo t es:

$$\frac{N(t)}{500}\,g/litro$$

La cantidad de nutrientes que sale por minuto es:

$$\frac{4litros}{min} * \frac{N(t)}{500}\,g/litro = \frac{4N(t)}{500}\,g/min$$

Ecuación Diferencial:

La tasa neta de cambio de nutrientes en el tanque es la diferencia entre la tasa de entrada y la tasa de salida:

$$\frac{dN}{dt} = 20 - \frac{4N(t)}{500}$$

Simplificando la ecuación diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = 20 - \frac{N(t)}{125}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden, que puede resolverse por métodos estándar como el de separación de variables o el uso de un factor integrante.

El factor integrante $\mu(t)$ es dado por:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{125}dt} = e^{\frac{t}{125}}$$

Multiplicar toda la ecuación por $\mu(t)$:

$$e^{\frac{t}{125}}\frac{dN}{dt} + e^{\frac{t}{125}}\frac{N(t)}{125} = 20e^{\frac{t}{125}}$$

La parte izquierda es la derivada del producto:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{125}}\ N\right) = 20e^{\frac{t}{125}}$$

Integrar con respecto a t:

$$e^{\frac{t}{125}}\ N = \int 20e^{\frac{t}{125}}dt$$

Luego la solución para $N(t)$:

$$N(t) = 2500 + Ce^{-\frac{t}{125}}$$

Bajo cierta condición inicial en t = 0 se obtiene el valor C

$N(0) = 1000, \quad C = -1500$

Solución final:

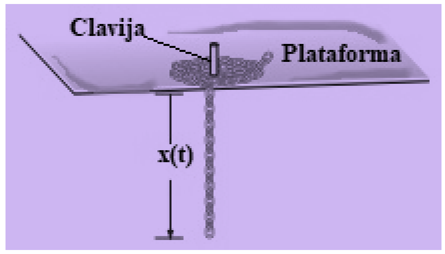
$$N(t) = 2500 - 1500e^{-\frac{t}{125}}$$

2.4.2 Ejercicio de Cadena cayendo

Una parte de una cadena de 8 pies de longitud está enrollada sin apretar alrededor de una clavija en el borde de una plataforma horizontal y la parte restante de la cadena cuelga sobre el borde de la plataforma. Suponga que la longitud de la cadena que cuelga es de 3 pies, que la cadena pesa $2lb/pie$ y que la dirección positiva es hacia abajo. Comenzando en $t = 0$ segundos, el peso de la cadena que cuelga causa que la misma sobre la plataforma se desenrolle suavemente y caiga al piso. Si $x(t)$ denota la longitud de la cadena que cuelga de la mesa al tiempo $t > 0$, entonces $v = \frac{dx}{dt}$ es su velocidad. Cuando se desprecian todas las fuerzas de resistencia se puede demostrar que un modelo matemático que relaciona a v con x está dado por:

$$xv\frac{dv}{dx} + v^2 = 32x$$

Determine una solución explícita y determine la velocidad con que la cadena deja la plataforma.



Para resolver este problema, vamos a seguir los pasos indicados:

Podemos reescribirla como:

$$xv\frac{dv}{dx} = 32x - v^2$$

$$xy\frac{dy}{dx} = 32x - y^2$$

Se dividen los dos lados por x:

$$v\frac{dv}{dx} = 32 - \frac{v^2}{x}$$

Esto se asemeja a la forma estándar de una ecuación de Bernoulli:

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)v^n$$

Donde $n = 2$, en este caso podemos identificar:

$P(x) = 0$

$Q(x) = 1/x$

$n = 2$

Para resolver esta ecuación, utilizamos la transformación $w = v^{-1}$. Por lo tanto, $v = 1/w$ y derivamos:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{w^2}\frac{dw}{dx}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$-\frac{1}{w^2}\frac{dw}{dx} + 0 = 32 - \frac{1}{w^2 x}$$

Multiplicamos toda la ecuación por $-w^2$:

$$\frac{dw}{dx} + 32w^2 = \frac{1}{x}$$

Esta es una ecuación diferencial de Bernoulli. Para resolverla, podemos utilizar el método de separación de variables.

2.4.3 Ejercicio de Circuitos en serie

Se aplica una fuerza electromotriz de 30 volts a un circuito en serie LR con 0.1 henrys de inductancia y 50 ohms de resistencia. Determine la corriente $i(t)$, si $i(0) = 0$.

Determine la corriente conforme $t \rightarrow \infty$

Solución:

Para resolver el problema del circuito RL con una fuerza electromotriz (FEM) de 30 volts, una inductancia de $L = 0.1$ henrys y una resistencia de $R = 50$ ohms, podemos usar la ecuación diferencial que describe el circuito:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V$$

Donde V es la tensión aplicada (30 volts).

Sustituyendo los valores de L, R y V:

$$0.1\frac{di}{dt} + 50i = 30$$

Organizando la ecuación:

$$\frac{di}{dt} + 500i = 300$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Para resolverla, se utiliza el método del factor integrante.

El factor integrante $\mu(t)$ se calcula como:

$$\mu(t) = e^{\int 500dt} = e^{500t}$$

Multiplicando toda la ecuación por el factor integrante:

$$e^{500t}\frac{di}{dt} + e^{500t}500i = e^{500t}300$$

La izquierda se puede reescribir como la derivada de un producto:

$$\frac{d}{dt}(e^{500t}i) = 300e^{500t}$$

Se integran los dos lados:

$$\int \frac{d}{dt}(e^{500t}i) = \int 300e^{500t}$$

La integral del lado izquierdo es simplemente:

$$e^{500t}i = \frac{300}{500}e^{500t} + C$$

Donde C es la constante de integración.

Se simplificando la integral del lado derecho y se despeja $i(t)$:

$$i(t) = 0.6 + Ce^{-500t}$$

Con la condición inicial $i(0) = 0, \quad C = -0.6$

Luego se sustituye C e $i(t)$:

$$i(t) = 0.6 - 0.6e^{-500t}$$

Para encontrar la corriente conforme $t \to \infty$:

$$\lim_{t \to \infty} i(t) = \log_{t \to \infty} 0.6 - 0.6e^{-500t} = 0.6$$

Luego:

$$i(\infty) = 0.6 \; amperios.$$

2.4.4 Movimiento libre no amortiguado

Una masa que pesa 3 libras estira un resorte 4.5 pulgadas. En t = 0 la masa se libera de un punto situado 6.8 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 5/3pies/s. Determine la ecuación de movimiento libre.
La solución del problema asociado con la masa y resorte se realiza siguiendo el procedimiento:

Datos del Problema:

Peso de la masa: $W = 3 \; libras$.

Estiramiento del resorte: $d = 4.5 \; pulgadas = 0.375 \; pies$

Posición inicial: $y(0) = -6.8 \; pulgadas = -17/15 \;\; pies$

Velocidad inicial: $\frac{dy}{dt}(0) = \frac{5}{3} \; pies/s$ (ascendente)

Se usará la ley de Hooke para calcular la constante del resorte k:

$$W = kd \rightarrow k = \frac{W}{d} = \frac{3lb}{0.375ft} = \frac{8lb}{ft}$$

La ecuación de movimiento para un sistema masa-resorte es:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$$

Primero, encontramos la masa m:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{3lb}{32.2ft/s^2} \approx 0.093slugs$$

Sustituyendo k y m en la ecuación:

$$0.093\frac{d^2y}{dt^2} + 8y = 0$$

Luego se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 86.02y = 0$$

La solución general de esta ecuación diferencial es de la forma:

$$y(t) = Acos(\omega t) + Bsen(\omega t)$$

Donde :

$$\omega = \sqrt{86.02} \approx 9.27$$

$$y(t) = Acos(9.27t) + Bsen(9.27t)$$

Usamos las condiciones iniciales para encontrar $A\ y\ B$:

Condición inicial de posición:

$$y(0) = -\frac{17}{15}$$

$$y(0) = Acos(0) + Bsen(0) => A = -\frac{17}{15}$$

Condición inicial de velocidad:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -A\omega sen(\omega t) + B\omega cos(\omega t)$$

Usamos la condición $v(0) = \frac{5}{3}$:

$$v(0) = -\left(-\frac{17}{15}\right) * 9.27(0) + B * 9.27$$

$$\frac{5}{3} = B * 9.27$$

$$B = \frac{5}{3 * 9.27}.$$

Sustituyendo AyB en la solución general:

$$y(t) = -\frac{17}{15}cos(9.27t) + 0.179sen(9.27t)$$

Esta es la ecuación de movimiento libre de la masa.

2.4.5 Ejercicio de Circuito en serie subamortiguado

Encuentre la carga q(t) presente en el capacitor de un circuito LRC en serie cuando $L = 0.75$ henry (H), $R = 8$ ohms (Ω), $C = 0.003$ farad (f), $E(t) = 0$ volts (V), $q(0) = q0$ coulombs (C) e $i(0) = 0$ amperes (A).

Para encontrar la carga q(t) en el capacitor de un circuito LRC en serie, podemos utilizar la ecuación diferencial que describe el circuito. La ecuación es:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t).$$

Datos del Problema:

Inductancia: $L = 0.75H$

Resistencia: $R = 8\Omega$

Capacitancia: $C = 0.003F$

Fuerza electromotriz: $E(t) = 0V$

Carga inicial: $q(0) = qoC$

Corriente inicial: $i(0) = 0A$

Sustituyendo los valores en la ecuación:

$$0.75\frac{d^2q}{dt^2} + 8\frac{dq}{dt} + \frac{1}{0.003}q = 0$$

Simplificando:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{8}{0.75}\frac{dq}{dt} + \frac{333.33}{0.75}q = 0$$

Por lo tanto, la ecuación se convierte en:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 10.67\frac{dq}{dt} + 444.44q = 0$$

Es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. La solución general tiene la forma:

$$q(t) = e^{\alpha t}\big(Acos(\omega t) + Bsen(\omega t)\big)$$

Donde α y ω se determinan a partir de las raíces del polinomio característico:

$$r^2 + 10.67r + 444.44 = 0$$

Calcular las Raíces del Polinomio Característico, fórmula cuadrática:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Luego:

$$r = -5.335 \pm 20.39i$$

La solución general es:

$$q(t) = e^{-5.335t}\big(Acos(20.39t) + Bsen(20.39t)\big)$$

2.4.6 Ejercicio de Movimiento de un proyectil

Un proyectil disparado desde un arma tiene un peso de w =mg y velocidad v tangente a su trayectoria de movimiento. Ignore la resistencia del aire y todas las demás fuerzas que actúan sobre el proyectil, salvo su peso y determine un sistema de ecuaciones diferenciales que describan la trayectoria del movimiento.

Datos del Problema:

Peso del proyectil: $w = mg$, actúa hacia abajo

Velocidad inicial: Supongamos que el proyectil es disparado con una velocidad inicial vo con un ángulo θ respecto a la horizontal.

Ecuaciones Diferenciales

Movimiento horizontal (x):

No hay aceleración horizontal (sin resistencia del aire), por lo que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

La velocidad horizontal es constante:

$$\frac{dx}{dt} = vocos(\theta)$$

Movimiento vertical (y):

La única aceleración es la gravedad:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

La velocidad vertical es:

$$\frac{dx}{dt} = vosen(\theta) - gt$$

Integración de la ecuación horizontal:

$$x(t) = vocos(\theta)t + xo$$

Donde xo es la posición inicial en x

Integración de la ecuación vertical:

$$y(t) = vosen(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 + yo$$

Donde yo es la posición inicial en y

CAPÍTULO III

ECUACIÓN DE BERNULLI

Aquella ecuación diferencial que se escriben de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n \quad (\boldsymbol{A})$$

Con $n \neq 0$ y $n \neq 1$, se denomina como Ecuación de Bernoulli. Si $n = 0$ se tiene una ecuación lineal de primer orden. Si $n = 1$ se obtiene una ecuación de variables separables

Solución:

La ecuación (A) se divide por y^n :

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{1-n}p(x) = Q(x) \quad (\boldsymbol{B})$$

Para resolver (B), se toma en consideracion que:

$$\boldsymbol{Z = y^{1-n}}$$

Se deriva con respecto con respecto a x:

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)\frac{dy}{dx}y^{-n}(\mathbf{C})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{dx}}{(1-n)y^{-n}} \quad (\mathbf{D})$$

Se reemplaza (C) y (D) en (B):

$$\cancel{y^{-n}}\frac{\frac{dz}{dx}}{(1-n)\cancel{y^{-n}}} + yy^{-n}\,p(x) = Q(x)$$

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dx} + z\,P(x) = Q(x)$$ →Ecuación lineal de primer orden

Para resolver esta ecuación se tiene que considerar que el coeficiente de z' sea igual a uno:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

Para su solución se utiliza la siguienete fórmula:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}\, dx + c\right]$$

Considerando las funciones $P(x)\ y\ Q(x)$ se obtiene la ecuación resultante :

$$y = e^{-\int (1-n)P(x)dx}\left[\int (1-n)Q(x)e^{\int (1-n)P(x)dx}\, dx + c\right]$$

Ejercicio 3.1.0

Resolver la ecuación diferencial de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + 3xy = 2x^2y^2$$

Se identifica la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

Donde ($n \neq 0, 1$). En este caso se tiene:

$$p(x) = 3x, q(x) = 2x^2, n = 2$$

Se realiza el cambio de variable:

$$z = y^{1-n} = y^{-1}$$

Entonces se tiene:

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

Se sustituye en la ecuación de Bernoulli, multiplicando por $(-y^{-2})$:

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx} + 3xz = 2x^2$$

Se resuelve la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dz}{dx} - 3xz = -2x^2$$

Se aplica el factor integrante:

$$e^{\int -3x\,dx} = e^{-\frac{3x^2}{2}}$$

Se multiplica ambos lados por el factor integrante:

$$e^{-3x^2/2}\frac{dz}{dx} - 3xe^{-3x^2/2}z = -2x^2e^{-3x^2/2}$$

Esto se puede escribir como:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{3x^2}{2}}z\right) = -2x^2e^{-\frac{3x^2}{2}}$$

Se integra ambos lados:

$$e^{-3x^2/2}z = \int -2x^2e^{-3x^2/2}\,dx + C$$

Se resuelve la integral, es importante mencionar que la misma puede ser complicada, pero supongamos que se resuelve y obtenemos:

$$z = -\frac{2}{3}x^3e^{\frac{3x^2}{2}} + Ce^{\frac{3x^2}{2}}$$

Volver a la variable original (y):

$$y = z^{-1} = (-\frac{2}{3}x^3e^{3x^2/2} + Ce^{3x^2/2})^{-1}$$

Ejercicio 3.1.1

Resolver la ecuación diferencial de Bernoulli.

$$\frac{dy}{dx} + sen(x)y = e^xy^{1/2}$$

Identificar la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

Donde ($n \neq 0, 1$). En este caso se tiene:

$$p(x) = \operatorname{sen}(x)\,, q(x) = e^{x}, n = \frac{1}{2}$$

Se realiza el cambio de variable:

$$z = y^{1-n} = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$$

Entonces se tiene:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}$$

Se sustituye en la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + \operatorname{sen}(x)\,y^{\frac{1}{2}} = e^{x}$$

Multiplicando por $(2y^{\frac{1}{2}})$:

$$\frac{dy}{dx} + 2\operatorname{sen}(x)\,y = 2e^{x}y^{\frac{1}{2}}$$

Dado que $(z = y^{\frac{1}{2}})$, se tiene:

$$\frac{dz}{dx} + \operatorname{sen}(x)\,z = e^{x}$$

Se resuelve la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)\, z = \frac{1}{2}e^{x}$$

Se aplica el factor integrante:

$$e^{\frac{1}{2}\operatorname{sen}\int (x)\, dx} = e^{-\frac{1}{2}\cos(x)}$$

Se multiplican los dos lados por el factor integrante:

$$e^{-\frac{1}{2}\cos(x)}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) e^{-\frac{1}{2}\cos(x)} z = \frac{1}{2}e^{x}e^{-\frac{1}{2}\cos(x)}$$

Esto se puede escribir como:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{1}{2}\cos(x)} z\right) = \frac{1}{2}e^{x-\frac{1}{2}\cos(x)}$$

Se integran ambos lados:

$$e^{-\frac{1}{2}\cos(x)} z = \frac{1}{2}\int e^{x-\frac{1}{2}\cos(x)}\, dx + C$$

Se procede con la integral, la resolución de la misma puede presentar cierta complejidad. Sin embargo, una vez resuelta se obtiene:

$$z = \frac{1}{2}\int e^{x-\frac{1}{2}\cos(x)}\, dx \cdot e^{\frac{1}{2}\cos(x)} + Ce^{\frac{1}{2}\cos(x)}$$

Volver a la variable original (y):

$$y = z^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = z^2$$

Sustituyendo la expresión de (z):

$$y = (\frac{1}{2}\int e^{x-\frac{1}{2}\cos(x)}\,dx \cdot e^{\frac{1}{2}\cos(x)} + Ce^{\frac{1}{2}\cos(x)})^2$$

***Nota*:** La ecuación de Bernoulli se resuelve tomando en consideracion que $z = y^{1-n}$ y derivando. Luego se reemplaza en la ecuación de Bernoulli y se obtiene una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Ejercicios propuestos sección 3. (soluciones obtenidas por WolframAlpha)

1. $\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$ Rep. $y(x) = \frac{2\sqrt{5}\, e^{5x}}{\sqrt{c_1 + e^{10x}(10x-1)}}$

2. $y' + y = xy^3$ Rep. $y(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c_1 e^{2x} + 2x + 1}}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x}y + \frac{1}{x^2}y^2$ Rep. $y(x) = -\frac{2x^3}{c_1 + x^2}$

CAPÍTULO IV

ECUACIÓN DE RICCATI

La expresión que se muestra a continuación representa una ecuación diferencial de **RICCATI** :

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{p(x)} + \mathrm{q(x)y} + \mathrm{R(x)y^2} = 0 \qquad (\mathbf{R})$$

Donde $(y = y_1(x))$ es la función desconocida y $(\boldsymbol{P(x)}), (\boldsymbol{Q(x)}), (\boldsymbol{R(x)})$ son funciones conocidas de la variable independiente $(\boldsymbol{x}), y_1(x) = x$

Esta ecuación solo puede resolverse cuando esta sustitución generalmente se basa en encontrar una solución particular conocida para luego realizar un cambio de variable apropiado.

Si $y = y_1 + z$ es una solución → se realiza $\quad y_1 = x \rightarrow \quad y' = 1$

$y = 1 + z;\ \ y = x + z; \rightarrow \quad \boldsymbol{y' = 1 + z'}$ si esto remplazo en (R), esta ecuación se puede reducir a una ecuación de Bernulli.

Ejecicio 4.1.0

Encuentre la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - 2\mathrm{x}^2 - \frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{y} + 2\mathrm{y}^2 = 0 \qquad (\boldsymbol{R})$$

Se supone que $y_1 = \boldsymbol{x}$ es una solución particular:

$$\frac{dy}{dx} = x + (\frac{1}{x} - x^2)y + y^2 = \boldsymbol{O}$$

La derivada de y' si es una solución debe cumplirse la igualdad en (R):

$y_1 = \boldsymbol{x} \quad (\mathbf{1})$

$y_1' = \mathbf{1} \quad (\mathbf{2})$

Luego se realiza el siguiente reemplazo (1) y (2) en (R), se obtiene la siguiente expresión:

$$1 - 2x^2 - \frac{1}{x}x + 2x^2 = 0$$

$$\cancel{1 - 2x2 - 1 + 2x2} = 0$$

Por lo tanto se ha comprobado que es solución. Entonces es una ecuación de **RICCATI**

- Solución de la ecuación de Ricartti

$$y = y_1 + z \qquad \boldsymbol{o´} \qquad y = x + z \qquad \textbf{(A)}$$

Entonces se realiza:

$$\boldsymbol{y} = y_1 + \boldsymbol{z} \ \textbf{(B)}$$

$$\boldsymbol{y'} = {y_1}' + \boldsymbol{z'} \ \textbf{(C)}$$

Se sustituye (B) y (C) en (R) :

$${y_1}' + z' - 2x^2 - \frac{1}{x}(y_1 + z) + 2(y_1 + z)^2 = 0$$

$$\overline{{y_1}'} + z' - \overline{2x^2} - \overline{\frac{1}{x}y_1} - \frac{1}{x}z + \overline{2{y_1}^2} + 4\,y_1 z + 2z^2 = 0$$

Se puede observar que los téminos asentuados corresponde a la ecuación (R) y es igual a cero.

$$\underbrace{\mathrm{y'1} - 2x2 - \frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{y1} + 2(\mathrm{y1})2}_{\mathrm{R= 0}} + z' - \frac{1}{x}z + 4\,y_1 z + 2z^2 = 0$$

Por lo tanto se reduce a la siguiente ecuación :

$$z' - \frac{1}{x}z + 4y_1 z + 2z^2 = 0$$

Recordemos que $y_1 = x$

$$\frac{dz}{dx} + \left(4x - \frac{1}{x}\right)z = -2z^2 \quad (F) \rightarrow \boxed{\text{Esta es una ecuación de Bernoulli}}$$

- Solución del caso de Bernoulli

Para proceder con la solución se considera el siguiente artificio**:**

$$u = z^{1-n}$$

Como $n = 2$, entonces:

$$u = z^{-1} \quad \mathbf{(D)}$$

Se deriva con respecto a x:

$$z = \frac{1}{u}$$

$$\frac{dz}{dx} = uD_x(1) - \frac{1}{u^2}D_x(u)$$

$$\frac{dz}{dx} = z' = -\frac{1}{u^2}(u') \quad \mathbf{(E)}$$

Se reemplaza (D) y (E) en (F):

$$-\frac{1}{u^2}(u') + \left(4x - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{u} = -2\,\frac{1}{u^2}$$

$$-(u') + \underbrace{\left(4x - \frac{1}{x}\right)}_{P(x)} u = \underbrace{-2}_{Q(x)} \quad \rightarrow$$

Escriba aquí la ecuación.

Esta es una ecuación lineal no homogénea

- Solución de la ecuación lineal no homogénea

Se utiliza la siguiente fórmula:

$$(u') - \left(4x - \frac{1}{x}\right)u = 2$$

$$\boldsymbol{u = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\, dx + c\right]}$$

Se reemplaza $P(x)$ y $Q(x)$ en la solución:

$$u = e^{-\int(-4x-\frac{1}{x})dx}\left[\int 2e^{\int(-4x-\frac{1}{x})dx}\, dx + c\right]$$

$$u = e^{+4\int(xdx)-\int\frac{dx}{x}}\left[2\int e^{-4\int xdx+\int\frac{dx}{x}}\, dx + c\right]$$

$$u = e^{+2x^2-lnx}\left[2\int e^{-2x^2+lnx}\, dx + c\right]$$

$$u = e^{2x^2}\, e^{-lnx}\left[2\int e^{-2x^2}\, e^{lnx} dx + c\right]$$

Nota: $\boldsymbol{e^{lnx} = x}$

Si $\boldsymbol{e^{x} = N \rightarrow lnN = x}$

Por tanto con la expresión se obtiene:

$$\mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{N} \rightarrow \ln \mathrm{N} = \ln x$$

$$\mathrm{N} = \mathrm{x} \rightarrow \mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{x}$$

$$u = e^{2x^2} e^{lnx^{-1}} \left[2 \int xe^{-2x^2} dx + c\right]$$

$$u = e^{2x^2} x^{-1} \left[2(-\tfrac{1}{4}) \int xe^{-2x^2} d(-2x^2) + c\right]$$

$$u = e^{2x^2} \tfrac{1}{x} \left[-\tfrac{1}{2} e^{-2x^2} + c\right]$$

$$u = \frac{e^{2x^2}}{x} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x^2} + c\right]$$

$$u = -\frac{1}{2x} + c\frac{e^{2x^2}}{x}$$

Remplazando $u = \frac{1}{z}$ se tiene:

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{2x} + c\frac{e^{2x^2}}{x}$$

Remplazando $z = y - y_1$:

$$\frac{1}{y - y1} = -\frac{1}{2x} + c\frac{e^{2x^2}}{x}$$

Como $y_1 = x$, entonces se obtiene la solución final:

$$\frac{1}{y - x} = -\frac{1}{2x} + c\frac{e^{2x^2}}{x}$$

Ejercicio 4.1.2

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$8xy' - y = -\frac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$$

$$y' - \frac{1}{8x}y = -\frac{y^{-3}}{8x\sqrt{x+1}} \quad \textbf{(A)}$$

Es una ecuación de Bernulli

Solución:

$$u = y^{1-n}$$

Como $n = -3$, se tiene:

$$u = y^{1-(-3)}$$

$$u = y^4 \quad \textbf{(B)}$$

$$\frac{du}{dx} = 4y^3\frac{dy}{dx}$$

Despejando el difrencial $\frac{dy}{dx}$ se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4y^3}\frac{du}{dx} \qquad \textbf{(C)}$$

Se reemplaza (C)en (A):

$$\frac{1}{4y^3}\frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}} - \frac{1}{8x}y = \frac{y^{-3}}{8x\sqrt{x+1}}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{y^4}{2x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x+1}}$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{2x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x+1}}$$

Esta es una ecuación lineal no homogénea

$$P(x) = -\frac{1}{2x} \qquad Q(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x+1}}$$

$$u = e^{+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}}\left[-\frac{1}{2}\int\frac{1}{2x\sqrt{x+1}}\ e^{-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}}\ dx + c\right]$$

$$u = e^{+\frac{1}{2}lnx}\ \left[-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x\sqrt{x+1}}\ e^{-\frac{1}{2}lnx}\ dx + c\right]$$

$$u = e^{+\frac{1}{2}lnx}\ \left[-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}\left(\sqrt{x}\right)^{-1} + c\right]$$

$$u = e^{+\frac{1}{2}lnx}\ \left[-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{x}\ \sqrt{x+1}} + c\right]$$

$$u = e^{+\frac{1}{2}lnx}\ \frac{1}{2}\left[-\int\frac{dx}{x\ \sqrt{x^2+x}}\ dx\right]$$

Tomando en consideración: $z = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{z} \rightarrow dx = \frac{1}{z^2}\ dz$

$$u = \frac{1}{2} e^{lnx^{+\frac{1}{2}}} \left[-\int -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}}} + c \right]$$

$$u = \frac{1}{2} e^{lnx^{+\frac{1}{2}}} \left[-\int -\frac{dz}{\sqrt{1+z}} \right]$$

$$u = \frac{1}{2} e^{lnx^{+\frac{1}{2}}} \left[\int \frac{dz}{\sqrt{1+z}} \right]$$

$$u = \frac{1}{2} e^{lnx^{+\frac{1}{2}}} \left[\int (1+z)^{-\frac{1}{2}} dz \right]$$

$$u = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} e^{ln\sqrt{x}} \frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}}{\cancel{-\frac{1}{2}}}$$

$$u = e^{ln\sqrt{x}} (1+z)^{\frac{1}{2}}$$

$$u = \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{X}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$u = \frac{\sqrt{x}\,\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

$$u = \sqrt{x+1}$$

$$y^4 = \sqrt{x+1}$$

Ejercicios Propuestos sección 4

1. $y' = 2x^2 + \frac{y}{x} - 2y^2$ Resp. $y(x) = \frac{2x}{1 + Ce^{2x^2}} + x$

2. $y' = -\frac{4}{x^2} \;\; -\frac{1}{x}y + y^2$ Resp. $y(x) = \frac{1}{\frac{x}{-4} + \frac{C}{x^3}} + \frac{2}{x}$

3. $y' = \frac{1}{x^2} - 2y^2 + y - \frac{1}{x}$ Resp. $\frac{1}{y - \frac{1}{x}} = e^{-x}x^4(\int 2e^x x^{-4}dx + C$

CAPÍTILO V

OPERADORES DIFERENCIALES LINEALES

Los operadores lineales diferenciales son operadores que actúan sobre funciones y que involucran derivadas. Son ampliamente utilizados en el campo de las matemáticas y la física para modelar y resolver ecuaciones diferenciales [25][26]. Un operador lineal diferencial toma una función como entrada y produce otra función como salida.

5.1 Teorema Principio de Superposición

Sea L_1, L_2 operadores diferenciales lineales de orden n_1 y n_2 respectivamente y sea $\lambda \epsilon \mathbb{R}$. Esta propiedad se indica a continuación[27].

$$(L_1 + L_2)(y) = L_1(y) + L_2(y)$$

$$(\lambda L)(y) = \lambda L(y)$$

Otra propiedad de los operadores lineales diferenciales es el producto:

$$(L_1 \, o \, L_2)(y) = L_1 \; [L_2(y)] = L_1 L_2$$

5.2 Transformaciones Lineales

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden puede representarse de la siguiente forma:

$$L(y) = f(x)$$

Donde L es un operador lineal diferencial de segundo orden y $f(x)$ es una función dada.

$$\mathrm{L(y) = a_n(x) * y^n(x) + a_{n-1}(x) * y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x) * y'(x) + a_0(x) * y(x)}$$

Donde $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ es la función de entrada, $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ denota la $\boldsymbol{k} -$ é$\boldsymbol{sima}$ derivada de $\boldsymbol{y}$ con respecto a $\boldsymbol{x}$, y $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x})$ son funciones conocidas como coeficientes del operador. Además, $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ y cada $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x})$, debe ser una función continua[28].

Ejercicio 5.2.0

$$L = D^n$$

Entonces:

$$L(y) = D^n(y)$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} \qquad , \frac{d^2y}{dx^2} = D^2(y)$$

$$\mathrm{L(y)} = \mathrm{xD}^2 - \mathrm{D} + 1 \rightarrow \quad \text{éste es un operador lineal}$$

$$L(y) = (x\boldsymbol{D}^2 - D + 1)(y)$$

ó

$$L(y) = x\boldsymbol{D}^2(y) - D(y) + y$$

este es el operador calculado en y

En el ejemplo siguiente se ejemplifica un operador lineal en términos de una función trigonomética:

$$L\ (sen\ 2x) = (xD^{\,2} - D + 1)\,(sen\ 2x)$$

Calculando el $sen\ 2x$ en términos de un operador lineal:

$$L(sen2x) = (xD^{\,2} - D + 1)\,(sen\ 2x)$$

$$L(sen\ 2x) = xD^{\,2}(sen\ 2x) - D\,(sen\ 2x) + (sen\ 2x) \qquad \mathbf{(1)}$$

$\mathrm{D}^{\,2}$ (sen 2x), indica que tengo que derivar dos veces:

$$\mathrm{D}^{2}(\mathrm{sen}\ 2\mathrm{x}) = \mathrm{D}[\mathrm{D}(\mathrm{Sen}2\mathrm{x})]$$

$$\mathrm{D}^{2}(\mathrm{sen}\ 2\mathrm{x}) = \mathrm{D}[\mathrm{Cos}\ 2\mathrm{x}\ \ \mathrm{D}(2\mathrm{x})]$$

$$\mathrm{D}^{2}(\mathrm{sen}\ 2\mathrm{x}) = \mathrm{D}[2\mathrm{Cos}\ 2\mathrm{x}]$$

$$\mathrm{D}^{2}(\mathrm{sen}\ 2\mathrm{x}) = 2\ \mathrm{D}(\mathrm{Cos}\ 2\mathrm{x})$$

$$\mathrm{D}^{2}(\mathrm{sen}\ 2\mathrm{x}) = 2\ (-\mathrm{Sen}\ 2\mathrm{x})\ \mathrm{D}(2\mathrm{x})$$

$$D^{2}\ (sen\ 2x) = -4sen2x \qquad (\mathbf{2})$$

$$D\ (sen\ 2x) = 2cos\ 2x \qquad (\mathbf{3})$$

Se reeemplaza (2) y (3) en (1):

$$L(Sen\ 2x) = x\ (-4\ Sen\ 2x) - (2\ Cos\ 2x) + Sen\ 2x$$

$$L(Sen\ 2x) = -4x\ Sen\ 2x - 2\ Cos\ 2x + Sen\ 2x$$

$$L(Sen\ 2x) = (1-4x)\ Sen\ 2x - 2\ Cos\ 2x$$

Si se presenta la siguiente ecuación diferencial se la transforma en operador lineal:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2} - \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{x} = 0$$

$$L(y) = D^2 - D + x = 0$$

Ejercicio 5.2.1

$$(D^2 - x)(xD - 1)(e^{-x}) = 0$$

Este es un operador lineal evaludao en $\boldsymbol{e^{-x}}$

Por lo tanto se tiene que:

$$(D^2 - x)(xD - 1)(e^{-x}) = (D^2 - x)[xD(e^{-x}) - e^{-x}]$$

$$(D^2 - x)(xD - 1)(e^{-x}) = (D^2 - x)(-x\,e^{-x} - e^{-x})$$

$$(D^2 - x)(xD - 1)(e^{-x}) = D^2(-xe^{-x} - e^{-x}) + x(xe^{-x} + e^{-x})$$

$$(D^2 - x)(xD - 1)(e^{-x}) = D[D(-xe^{-x} - e^{-x})] + x^2(e^{-x} + xe^{-x})$$

$$(D^2 - x)(xD - 1)(e^{-x}) = D[D(-xe^{-x}) - D(e^{-x})] + x^2e^{-x} + xe^{-x}$$

$$(D^2 - x)(xD - 1)(e^{-x}) = xD(e^{-x}) + e^{-x}(x) + x^2e^{-x} + xe^{-x}$$

$$(D^2 - x)(xD - 1)(e^{-x}) = x(e^{-x})D(-x) + e^{-x} + x^2e^{-x} + xe^{-x}$$

$$(D^2 - x)(xD - 1)(e^{-x}) = \cancel{-x(e^{-x})} + e^{-x} + x^2e^{-x} \cancel{+x}e^{-x}$$

$$(D^2 - x)(xD - 1)(e^{-x}) = e^{-x} + x^2e^{-x}$$

$$(D^2 - x)(xD - 1)(e^{-x}) = (\boldsymbol{x^2 + 1})(e^{-x})$$

Además, en un producto de operadores diferenciales se estabece lo siguiente:

$$D * (D(xy)) = D^2$$

Se realiza la derivada de un producto:

$$D(xy) = xD(y) + yD(x)$$

Por tanto:

$$D(xy) = xDy + y$$

Ejercicio 5.2.2

Dado los siguientes operadores :

$$L_1 = x D^2 - 2$$

$$L_2 = D - x$$

Calcular:

a) $L_1 \, o \, L_2$
b) $L_2 \, o \, L_1$

a)

$$(L_1 \, o \, L_2)y = L_1 [L_2 \, y]$$

$$(L_1 \, o \, L_2)y = (x D^2 - 2) (Dy - xy)$$

$$(L_1 \, o \, L_2)y = (x D^2 \, (Dy - xy) - 2(Dy - xy)$$

$$((L_1 \, o \, L_2)y \; = \; x\,D^3 \; y - x\,D^2(xy) - 2Dy + 2xy$$

$$(L_1 \, o \, L_2)y \; = \; x\,D^3 \; y - x\,D[D(xy)] - 2Dy + 2xy$$

Cuando los coeficientes no son constantes el operador no es Conmutativo:

$$x\,D^2 \;(Dy) \neq D^3 \;(xy)$$

Esto es:

$$x\,D^2 \;(Dy) = xD^3y$$

$$(L_1 \, o \, L_2)y \; = \; x\,D^3 \; y - xD[xDy + yDx] - 2Dy + 2xy$$

$$(L_1 \, o \, L_2)y = x\,D^3 \; y - xD[xDy + y] - 2Dy + 2xy$$

$$(L_1 \, o \, L_2)y \; = \; x\,D^3 \; y - xD(xDy) - xDy - 2Dy + 2xy$$

$$(L_1 \, o \, L_2)y \; = \; x\,D^3 \; y - x[xD(Dy) + Dy\left(D(x)\right)] - xDy - 2Dy + 2xy$$

$$(L_1 \, o \, L_2)y \; = \; x\,D^{\,3}\,y - x^2D^2y - xDy - xDy - 2Dy + 2xy$$

$$(L_1 \, o \, L_2)y \; = \; x\,D^3y - x^2D^2y - 2xDy - 2Dy + 2xy$$

$$(L_1 \, o \, L_2)y \; = \; (x\,D^3 - x^2D^2 - 2xD - 2D + 2x)(y)$$

b)

$$(L_2 \, o \, L_1)(y) = L_2\,[L_1(y)]$$

En este caso la ecuación calculada con respecto al operador L_1 es:

$$(L_2 \, o \, L_1)(y) = (D - x)\,[(x\,D^2 - 2)\,(y)]$$

$$(L_2 \, o \, L_1)(y) = (D - x)\,[x\,D^2 y - 2y]$$

$$(L_2 \, o \, L_1)(y) = (D - x)\,(x\,D^2 y) - (D - x)(2y)$$

$$(L_2 \, o \, L_1)(y) = D\,(x\,D^2 y) - 2Dy - x^2 D^2 y + 2xy$$

$$(L_2 \, o \, L_1)(y) = xD\,(D^2 y) + D^2 y\,D(x) - 2Dy - x^2 D^2 y + 2xy$$

$$(L_2 \, o \, L_1)(y) = (x\,D^3\,y + D^2 y - 2Dy - x^2 D^2 y + 2xy$$

O también se puede expresar como:

$$(L_2 \, o \, L_1)(y) = (x\,D^3 + D^2 - x^2 D^2 - 2D + 2x)(y)$$

También se puede sacar factor común:

$$(L_2 \, o \, L_1)(y) = [(x\ D^3 + (1 - x^2)D^2 - 2D + 2x)]\,(y)$$

Ejercicio 5.2.3

$$(3D^2 + D)\,(2D^2 - 1)\,(y) = 0$$

Realizando el producto tenemos:

$$(3D^2 + D)\,(2D^2 - 1)\,(y) = (6D^4 - 3D^2 + 2D^3 - D)\,(y)$$

$$(3D^2 + D)\,(2D^2 - 1)\,(y) = (6D^4 + 2D^3 - 3D^2 - D)\,y$$

$$(3D^2 + D)\,(2D^2 - 1)\,(y) = (6D^4y + 2D^3\,y - 3D^2y - Dy)$$

Observación:

1. Cuando los coeficientes son constantes el operador diferencial lineal es conmutativo
2. En este caso se puede simplemente multiplicar como polinomios sin tomar en cuenta el orden de los factores.
3. Cuando los coeficientes no son constantes se multiplican como polinomios pero tomando en cuenta estrictamente el orden de los factores, es decir entre el operador y las variables, operador y los coeficientes.

Se puede plantear también al contrario el ejercicio, es decir se da el polinomio y se encuentra los factores, en conclusión se debe factorar.

Ejercicio 5.2.4

$D^3 - 2D^2 - 5D + 6$

1	-2	-5	6	
	1	-1	-6	1
1	-1	-6	0	

$$D^3 - 2D^2 - 5D + 6 = (D^2 - D - 6)\,(D - 1)$$

Seguimos factorando:

$$D^3 - 2D^2 - 5D + 6 = (D - 3)\,(D + 2)\,(D - 1)$$

5.3 Teoría General de las Ecuaciones Diferenciales Lineales

- $L: \quad \zeta^{n}(I) \rightarrow \zeta(I)$
- $\zeta^{n}(I) \quad \rightarrow$ es el conjunto de las funciones n-veces diferenciales con continuidad
- $\mu \in \zeta(I) : Si\, \mu : I \rightarrow \mathbb{R}$
- μ es función continua
- $\zeta(I)$ es un espacio vectorial
- $f, g \in \zeta(I)$
- $f + g: \; I \rightarrow \mathbb{R}$

  $x \rightarrow (f + g)_{(x)} = (f(x) + g)(x)$
- $\lambda f: \quad I \rightarrow \mathbb{R}$

  $x \rightarrow (\lambda f)_{(x)} = \lambda f(x)$

$(\zeta(I), t, \circ) \quad \rightarrow$ es un espacio vectorial.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R} \times \zeta(I) \rightarrow \zeta(I) \\ (\lambda, f) \rightarrow \lambda f \\ (f, g) \rightarrow f+g \end{array}\right\}$$

Ejercicio 5.3.0

$\mathbb{R} \times \zeta(I) \rightarrow \zeta(I)$

$(\lambda, f) \rightarrow \lambda f$

1. Probar que $\zeta(I)$ es efectivamente un espacio vectoria

Para ser un espacio vectorial debe cumplir con los siguien

$Si: T: \quad V \rightarrow w$ es un espacio vectorial si

$K, u, w, \in V$ entonces:

$$T(u + w) = Tu + Tw$$

2) $K, \lambda \in \mathbb{R}, \forall, u, \in V$

$$T \lambda u = \lambda T u$$

Estas dos expresiones se pueden resumir en una sola condición

$$\forall u, v \in V \, y \, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$T(u + \lambda v) = Tu + \lambda Tv$$

CAPITULO VI

ECUACION DIFERENCIAL HOMOGÉNEA DE ORDEN N

La ecuación diferencial homogénea de orden n se puede representar de la siguiente manera[29]:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

6.1 Primer Método de solución del operador diferencial

Suponemos que conocemos una solución: $y_1 = e^x$ y se trata de encontrar otra solución de la ecuación diferencial mediante un operador lineal.

Ejercicio 6.1.0.

Si $y_1 = e^x$ es solución de $(D-1)^2\ y = 0 \qquad (\boldsymbol{A})$

Se encuentra la otra solución. Para resolver esta ecuación, se puede utilizar el método de solución por sustitución

1. Primero comprobamos si y_1 es solución de la ecuación $(\boldsymbol{A})$ para ello se reemplaza y_1 en $(\boldsymbol{A})$ y se obtiene una igual a cero, entonces será solución.

$$(D-1)^2(e^x) = 0$$

$$(D^2 - 2D + 1)\ (e^x) = 0$$

$$D^2\ (e^x) - 2D\ (e^x) + e^x = 0$$

$$D(e^x) - 2\ e^x + e^x = 0$$

$$e^x\ - 2e^x + e^x = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{sí es solución.}$$

$2.$ Se calcula la otra solución para eso se utiliza la fórmula de $ABEL.$

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}}{{y_1}^2(x)} dx$$

Para saber cuál es $a_1 y\ a_2$ tomamos de $(\boldsymbol{A}),$ $D^2 - 2D + 1 = 0$ pero lo ponemos como $y'' - 2y' + y = 0$

Y se tiene que $a_2 = 1\ ;\ a_1 = -2$ y $a_0 = 1$

$$y_2(x) = e^x \int \frac{e^{-\int \frac{-2}{1} dx}}{(e^x)^2} dx$$

$$y_2(x) = e^x \int \frac{e^{-2\int 1 dx}}{e^{2x}} dx$$

$$y_2(x) = e^x \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}} dx$$

$$y_2(x) = e^x \int dx$$

$$y_2(x) = xe^x$$

las soluciones $\boldsymbol{y_1}$ y $\boldsymbol{y_2}$ se verifican cuando $w\ es \neq O$

$$w[e^x, xe^x] = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{vmatrix} = ex^{2x} + e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x} \neq 0$$

Como w $\neq 0,$ la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$$y_6 = y_1 + y_2$$

$$y_6 = c_1 + c_2\, xe^x$$

6.2 Segundo Método de solución por Coeficientes Constantes

Sea $[a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} \ldots + a_1 D + a_0]\ y = 0\ \ con\ \ a_n \neq 0$ como es a coeficientes constantes entonces a_i son ctes.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y' + a_0 y = 0$$

$$a_n \propto^n + a_{n-1} \propto^{(n-1)} + \ldots + a_1 \propto' + a_0 = 0$$

Esta expresión se la conoce como la ecuación característica que corresponde a la ecuación diferencial.

6.2.1 Raíces de la ecuación característica

Las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes son un tipo especial de ecuaciones diferenciales lineales donde los coeficientes de las derivadas son constantes.

CASO 1: Raíces Reales y distintos.

$$\propto_1, \propto_2 \ \ldots., \propto_n \quad con \quad \propto_1 \neq \propto_2 \neq \cdots \neq \propto_n$$

Las soluciones fundamentales son:

$$\boldsymbol{e^{\propto_1 x}, e^{\propto_2 x}, \ldots., e^{\propto_n x}}$$

Y la solución general es:

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{\propto_1 x} + c_2 e^{\propto_2 x} + \ldots \ldots, c_n e^{\propto_n x}}$$

Por ejemplo, si hablamos de la ecuación diferencial de 2do orden tendremos:

$$(D^2 + a_1 D + a_0)y = 0$$

Esta ecuación es igual que:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

a_1, a_0 son constantes asociados a esta ecuación característica :

$$\mathrm{m}^2 + \mathrm{a1m} + \mathrm{a}_0 = 0 \quad \textbf{(A)}$$

Quedando un polinomio en función de m:

$$\mathrm{P(m)} = \mathrm{m}^2 + \mathrm{a}_1\mathrm{m} + \mathrm{a}_0$$

Suponemos que $\propto_{1,}\propto_2$ son raíces y distintas reales de A

Factorizando el polinomio:

$$p(m) = (m - \propto_1)(m - \propto_2)$$

$$(D - \propto_1)(D - \propto_2) = 0$$

La solución general de la ecuación de 2do orden cuando tienen raíces reales y distintas es:

$$\mathrm{y}_{(\mathrm{x})} = \mathrm{c}_1 \mathrm{e}^{\propto_1 \mathrm{x}} + \mathrm{c}_2 \mathrm{e}^{\propto_2 \mathrm{x}}$$

Ejercicio 6.2.0

$$y'' - y' - 12y = 0$$

Es equivalente a:

$$(D^2 - D - 12)\, y = 0$$

Ecuación característica:

$$\propto^2 -\propto -12 = 0$$

Para encontrar las raíces tomamos en consideramos la ecuación característica

$$(\propto -4)(\propto +3) = 0$$

$$\propto_1 = 4 \ \text{y} \ \ \propto_2 = -3$$

La solución final es:

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x}$$

CASO 2: Raíces reales para algunos se repitan

$\propto_1 = \propto_2 = \cdots = 2k\ y\ \ \propto_{k+1} \neq \propto_{k+2} \neq \ldots\ldots \neq \propto_n$ la solución general está dada por:

$$y = c_1 e^{\propto x} + xc_2 e^{\propto x} + \ldots\ldots + c_n x^{n-1} e^{\propto n} + c_{n+1} e^{\propto_{n+1} x} + \ldots. + c_n e^{\propto_n x}$$

En este caso se ha obtenido raíces iguales

Ejercicio 6.2.1

En el caso de la ecuación diferencial de 2do orden se tiene: $\propto_1 = \propto_2$ soluciones de la **A**, esto indica que el operador se puede expresar como: $(D-2)^2(y) = 0$ y obteniendo raíces de la forma $e^{\propto_1 x}$, $xe^{\propto_1 x}$

$$y(x) = c_1 e^{\propto_1 x} + c_2 x e^{\propto_1 x}$$

Ejemplo 6.2.2

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$(D^2 - 2D + 1)\, y = 0$$

$$\propto^2 - 2 \propto +1 = 0$$

$$(\propto -1)(\propto -1) = 0$$

$$\propto_1 = 1 \qquad \propto_2 = 1$$

$$\mathrm{y(x)} = \mathrm{c_1 e^x + c_2 x e^x}$$

Solo se trata de encontrar los $\propto_i$ y reemplazar en la solución general

Ejercicio 6.2.3

$$y^{(7)} - 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0$$

$$(D^7 - 2D^5 + D^3)y = 0$$

$$\propto^7 - 2 \propto^5 + \propto^3 = 0$$

$$\propto^3 (\propto^4 - 2 \propto^2 + 1) = 0$$

$$\propto^3 = 0$$

$$(\propto^2 - 1)(\propto^2 - 1) = 0$$

$$(\propto +1)(\propto -1)(\propto +1)(\propto -1) = 0$$

$$\propto_2 = 1; \quad \propto_3 = 1; \quad \propto_4 = -1; \;\; y \quad \propto_5 = 1$$

$$\propto_2 = \propto_4 = -1 \;\; y \quad \propto_3 = \propto_5 = 1$$

Podemos tornar en orden los $\propto$ estos valores reemplazamos en la solución general tenemos:

$$\propto_1 = 0$$

$$\propto_2 = \propto_3 = -1$$

$$\propto_4 = \propto_5 = 1$$

$$\propto_1 = \propto_6 = \propto_7 = 0$$

$$y = c_1 e^{\propto_1 x} + x c_2 e^{\propto_6 x} + x^2 c_3 e^{\propto_7 x} + c_4 e^{\propto_2 x} + c_5 x e^{\propto_3 x} + c_6 e^{\propto_4 x} + c_7 x e^{\propto_5 x}$$

$$\mathrm{y = c_1 e^0 + x c_2 e^0 + x^2 c_3 e^0 + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 e^{x} + c_7 x e^{x}}$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 e^{x} + c_7 x e^{x}$$

Ejercicio 6.2.4

$$(D-5)^5 y = 0$$

$$(\propto -5)^5 = 0$$

$$(\propto -5)(\propto -5)(\propto -5)(\propto -5)\ (\propto -5) = 0$$

$$\propto_1 = \propto_2 = \propto_3 = \propto_4 = \propto_5 = 5$$

$$y = \ c_1 e^{d_1 x} + c_2 x e^{d_2 x} + c_3 x^2 e^{d_3 x} + c_4 x^3 e^{d_4 x} + c_5 x^4 e^{d_5 x}$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{c}_1 \mathrm{e}^{5\mathrm{x}} + \mathrm{c}_2 \mathrm{x} \mathrm{e}^{5\mathrm{x}} + \mathrm{c}_3 \mathrm{x}^2 \mathrm{e}^{5\mathrm{x}} + \mathrm{c}_4 \mathrm{x}^3 \mathrm{e}^{5\mathrm{x}} + \mathrm{c}_5 \mathrm{x}^4 \mathrm{e}^{5\mathrm{x}}$$

Se puede comprobar que es la solución de la ecuación diferente reemplazando en $(D-5)^5 y = 0$ y debe ser igual a cero, por ejemplo $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$ es la solución de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = O$ comprobando $(D^2 - 2D + 1)(y) = 0$

$$(D^2 - 2D + 1)\ (c_1 e^x + c_2 x e^x) = 0$$

$$D^2(c_1 e^x + c_2 x e^x) - 2D(c_1 e^x + c_2 x e^x) + \ (c_1 e^x + c_2 x e^x) = 0$$

$$D[D(c_1 e^x) + D(c_2 x e^x)] - 2[D(c_1 e^x) + D(c_2 x e^x)] + c_1 e^x + c_2 x e^x = 0$$

Desarrollando la ecuación y reemplazando se obtiene una identidad, esto es $0 = 0$, entonces si es solución.

Ejercicio 6.2.5

$$(D+2)^3 (D^2 - 5D + 6) y = 0$$

$(\propto +2)^3 (\propto D^2 - 5 \propto +6) = 0$

$$\underbrace{(\propto +2)(\propto +2)(\propto +2)}\underbrace{(\propto -3)(\propto -2)} = 0$$

$$\propto_1 = \propto_2 = \propto_3 = -2 \qquad\qquad \propto_4 = 3,\ \propto_5 = 2$$

raíces iguales

raíces diferentes

$$y = c_1 e^{\propto 1x} + c_2 x e^{\propto 2x} + c_3 x^2 e^{\propto 3x} + c_4 e^{\propto 4x} + c_5 e^{\propto 5x}$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + c_3 x^2 e^{-2x} + c_4 e^{3x} + c_5 e^{2x}$$

CASO 3: Raíces complejas

En este caso tenemos que

$$\propto_1 = a + bi \quad (\mathbf{1}) \qquad y \qquad \propto_2 = a - bi \quad (\mathbf{2})$$

$e^{\propto 1x}, e^{\propto 2x}$

$$e^{\propto 1x} = e^{(a+bi)x} = e^{ax} e^{bix}$$

$$e^{\propto 2x} = e^{(a-bi)x}$$

$$e^{\propto 2x} = e^{ax} e^{-bix} \quad (\mathbf{1})$$

$$e^{\propto 1x} = e^{ax} e^{bix} \quad (\mathbf{2})$$

$$e^{\pm aix} = cosbx \pm isenbx \quad (\mathbf{3})$$

Sabemos que:

$$y(x) = c_1 e^{\propto 1x} + c_2 e^{\propto 2x} \quad (\mathbf{4})$$

Solución general

Se reemplaza (1) y (2) en (4):

$$y(x) = c_1 e^{ax} e^{bix} + c_2 e^{ax} e^{-bix} \qquad \mathbf{(5)}$$

Se reemplza (3) en (5):

$$y(x) = c_1 e^{ax}(cosbx + isenbx) + c_2 e^{ax}(cosbx - isenbx)$$

$$y = (c_1 + c_2)e^{ax} cosbx + i(c_1 - c_2)e^{ax} senbx$$

Se puede probar que:

$\{e^{ax} cosbx, e^{ax} senbx\}$. es una base para el espacio solución del operador

Como $c_1 + c_2 = C1$ $\quad y \quad$ $i(c_1 - c_2)$= C_2

$$y(x) = C1e^{ax} cosbx + C2e^{ax} senbx$$

Ejemplo 6.2.6

Resuelva la ecuación diferencial

$$y''' + y = 0$$

$$(D^3 + 1)y = 0$$

$$\propto^3 + 1 = 0$$

Factorizando:

$$(\propto +1)(\propto^2 -\propto +1) = 0$$

$$\propto_1 = -1$$

$$\propto_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\propto_1 = -1$$

$$\propto_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\propto_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

La solución a la ecuación diferencial es:

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{1}{2}x}cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3e^{\frac{1}{2}x}sen\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Ejercicio 6.2.7

Resuelva la ecuación diferencial mediante operadores diferenciales

$$y'' - y' - 12y = 0$$

$$(D^2 - D - 12)y = 0$$

$$(\alpha^2 - \alpha - 12) = 0$$

$$(\alpha - 4)(\alpha + 3) = 0$$

$$y(x) = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$$

Realizando el reemplazo de $\alpha_1 y\ \alpha_2$ se tiene:

$$y(x) = \ C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x}$$

Ejercicio 6.2.8

Del siguiente operador diferencial encuentre la función primitiva de la ecuación diferencial

$$(D^2 + D + 1)^2 y = 0$$

$$(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \qquad \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\alpha_1 \ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \alpha_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \alpha_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Se observa que para la solucion no se considera el signo $C_1 e^{ax} cosbx + C_2 e^{ax} senbx$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \alpha_3 = \alpha_4 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$y = C_1e^{-\frac{1}{2}x}cos\frac{\sqrt{3}}{2} + C_2e^{-\frac{1}{2}x}sen\frac{\sqrt{3}}{2} + C_1xe^{-\frac{1}{2}x}cos\frac{\sqrt{3}}{2} + C_4xe^{-\frac{1}{2}}sen\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejercicio 6.2.9

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$(y''' + y)^2 = 0$$

$$(D^3 + 1)^2y = 0$$

La ecuación caracteristica se la obtiene con la siguiente expresión: $(\propto^3 + 1)^2 = 0$

$$(\propto +1)(\propto^2 -\propto +1)(\propto +1)(\propto^2 -\propto +1) = 0$$

$$\propto_1 = -1;\ \ \propto_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;\ \ \propto_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;\ \ \propto_4 = -1;\ \ \propto_5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$\propto_6 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\propto_1 = \propto_4 = -1$$

$$\propto_2 = \propto_5 = \propto_3 = \propto_6 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3e^{\frac{1}{2}x}cos\frac{\sqrt{3}}{2} + C_4e^{\frac{1}{2}}sen\frac{\sqrt{3}}{2} + C_5e^{\frac{1}{2}x}xcos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_6xe^{\frac{1}{2}x}sen\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Ejercicios propuestos sección 6.

1. $y'' + 2y - 15 = 0$ Resp. $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-5x}$

2. $(y''' - 6)^3 = 0$ Resp. $y = x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$

3. $y''' - 3y'' - 17y - 6 = 0$ Resp. $y(x) = C_1 e^{6x} + C_2 e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}x} + C_3 e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}x}$

CAPÍLO VII

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN N, NO HOMOGÉNEAS A COEFICIENTES VARIABLES

Las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables de orden n no homogéneas se pueden expresar de forma general [30].

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

Donde $y^{(n)}$representa la n–enésima derivada de y con respecto a x, $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ son coeficientes variables que dependen de y y $g(x)$ es una función conocida.

Para resolver este tipo de ecuaciones, se pueden utilizar diferentes métodos, como el método de coeficientes indeterminados o el método de variación de parámetros.

Si se tiene una ecuación diferencial de la forma con segunda derivada [31], [32].

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x)$$

En algún intervalo $\boldsymbol{I}$ la solución general es:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(X)$$

Donde $Y_h(x)$ es la solución global de la ecuación diferencial homogénea conocida, es decir la solución de :

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (\boldsymbol{R})$$

$Y_p(x)$ es la solución particular de la ecuación diferencial homogénea

Solución :

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

$$y_p(x_0) = 0$$

$$y'_p(x_0) = 0$$

$$\boxed{X_0 \epsilon\ I}$$

Se supone que $y_{1,}y_2$ son solución de la ecuación diferencial homogénea

$Y_h(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x)$ $(\boldsymbol{A})$ Solución general de homogénea asociada

La variación de las constantes en función de x se referencia en la siguiente ecuación como una solución particular.

$$Y_p(x) = C_1(x)Y_1(x) + C_2(x)Y_2(x) \quad (\boldsymbol{B})$$

A partir de la solución particular se trata de conocer qué forma tienen $C_1(x)\ y\ C_2(x)$

1. $Y'_p(x) = C'_1Y_1 + C_1Y_1{}' + C_2{}'Y_2 + C_2Y_2{}'$

2. $Y''_p(x) = (C_1Y_1 + C_2Y_2)' + C'_1Y'_1 + C_1Y_1'' + C_2{}'Y_2' + C_2Y_2{}''$

Remplazando (1), (2) y (B) en (R):

$$(C_1Y_1{+}C_2Y_2)' + C_1{}'Y_1{}' + C_1y'' + C_2{}'Y_2{}' + C_2Y_2{}'' + a_1(C_1'y_1{+}C_1Y_1' + C_2{}'Y_2 + C_2Y_2{}') + a_o(C_1Y_1 + C_2Y_2) = h(x)$$

Agrupando:

$$c_1[y_1'' + a_1 y_1 + a_0 y_1] + c_2[y_2'' + a_1 y_2{}' + a_0 y_2] + [c_1{}' y_1 + c_2' y_2]' + c_1' y_1' + c_2' y_2' + a_1(c_1' y_1 + c_2' y_2) = h(x)$$

Si se considera que:

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

Entonces:

$$c_1' y_1{}' + c_2' y_2{}' = h(x)$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ h(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & h(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$c_1'(x) = \frac{-y_2(x)h(x)}{w[y_1, y_2]}$$

$$c_2'(x) = \frac{y_1(x)h(x)}{w[y_1, y_2]}$$

$$\int c_1'(x) = -\int \frac{y_2(x)h(x)}{w[y_1, y_2]} dx + k_1 \qquad \mathbf{(3)}$$

$$\int c_2'(x) = -\int \frac{y_1(x)h(x)}{w[y_1, y_2]}dx + k_2 \qquad \textbf{(4)}$$

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2(x)h(x)}{w[y_1, y_2]}dx + k_1$$

$$c_2(x) = \int \frac{y_1(x)h(x)}{w[y_1, y_2]}dx + k_2$$

Como se tiene que la solución particular es:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \qquad (\boldsymbol{B})$$

Se reemplaza (3) y (4) en (B) :

$$Y_P(x) = -\int \frac{y_2(x)h(x)}{w[y_1, y_2]}dx\, y_1(x) + \int \frac{y_1(x)h(x)}{w[y_1, y_2]}dx y_2(x)$$

$$y_p(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x)h(t)}{w[y_1, y_2]}dt + \int_{x_0}^{x} \frac{y_2(t)y_1(x)h(t)}{w[y_1, y_2]}dt$$

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{w[y_1(t), y_2(t)]}\right) h(t)dt$$

Si:

$$k(x, t) = \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{w[y_1(t), y_2(t)]}$$

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} k\ (x,t)h(t)dt$$

Es importante tener en cuenta que resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas a coeficientes variables, $G(h)$ se define como:

$$G: \zeta(I) \rightarrow \zeta^2(I)$$

$$h \rightarrow G(h)$$

$$G(h) = \int_{x_0}^{x} k(x,t)h(t)dt$$

$K(x,t)$ función de Green de L :

$$L = D^2 + a_1(x)D + a_0Id$$

$$y_p = y_2(x)\int \frac{y_1(x)h(x)}{w[y_1,y_2]}dx - y_1(x)\int \frac{y_2(x)h(x)}{w[y_1,y_2]}dx$$

Esta es la fórmula para calcular la solución particular de la ecuación diferencial lineal de orden dos no homogénea.

Generalizando la fórmula para calcular la solución particular de una ecuación diferencial de orden n no homogénea tenemos:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x) \qquad \textbf{(A)}$$

$(y_1, \dots, y_n)$ es linealmente Ind. y $(y_1, \dots, y_n)$son soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada a (***A***).

$$Y_P(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \cdots + c_n'(x)y_n(x) = 0$$

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \cdots + c_n'(x)y_n'(x) = 0$$

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = h(x)$$

$$V_k(x) = \begin{vmatrix} y_1(x)y_2(x)\ldots 0 & y_{n+1}(x)\ldots & y_n(x) \\ \vdots & . & . \\ y_1(x) \quad \ldots\ 1 & y_{n+1}^{(n-1)}(x)\ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$c_n'(x) = \frac{V_k(x)h(x)}{w[y_{1,\ldots,}y_n]}$$

$$c_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{V_k(t)}{w[y_1(t), \ldots, y_n(1)]} h(t)dt$$

$$y_p(x) = \sum_{n=1}^{n} y_n(x) \int_{x_0}^{x} \frac{V_k(t)}{w[y_1(t), \ldots, y_n(t)]} h(t)dt$$

$$y_0(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\sum V_k(t)y_k(x)}{w[y_1(t), \ldots, y_n(t)]} h(t)dt$$

Dónde:

$$\frac{\sum V_k(t)y_k(x)}{w[y_1(t),\ldots,y_n(t)]} = k(x,t)$$

$$Y_P(X) = \int_{X_0}^{X} k(x,t)\, h(t)dt$$

Ejercicio 7.1.0

$$y'' + y = tg(x)$$

1.- La solución general de la ecuación es:

$$y_G = y_h y_p$$

2.- Resuelvo o hallo la solución de la homogénea.

$$y'' + y = 0$$

$$(D^2 + 1)y = 0$$

$$(\alpha^2 + 1) = 0$$

$$\alpha = \frac{0 \pm 2i}{2} \; ; \qquad \alpha_1 = 0 + i \qquad \alpha_2 = 0 - i$$

$$y_h = c_1 e^{ax} cosbx + c_2 e^{ax} senbx$$

3.- Se halla la solución particular para eso utilizo la fórmula

$$y_h = c_1 cosx + c_2 senx$$

Solución de la homogénea

Para saber y_1, y_2 sacamos de:

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 senx$$

$$y_p = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{w[y_1(t), y_2(t)]} h(t)dt \qquad (\boldsymbol{A})$$

Como:

$$Yh(x) = c_1y_1(k) + c_2y_2(x)$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{array}{ccc} y_1(x) = cosx & & y_1(t) = cost \\ y_2(x) = senx & \longrightarrow & y_2(t) = sent \\ h(x) = tgx & & h(t) = tgt \end{array}$$

Calculamos el Wronskiano:

$W[y_1(t), y_2(t)]$

$$W[y_1(t), y_2(t)] = \begin{vmatrix} cost & sent \\ -sent & cost \end{vmatrix}$$

Remplazando:

$$W[y_1(t), y_2(t)] = cos^2t + sen^2t = 1$$

$$y_1(x), y_2(x), y_1(t), y_2(t)$$

$$h(t) \;\; y \;\; w[\, y_1(t), y_2(t)] \;\; en \quad (\boldsymbol{A})$$

$$Y_p = \int_{x_0}^{x} senx\ sent\ dt \ - \int_{x_0}^{x} \frac{cosx\ \ sen^2t}{\cos t}\ dt$$

Como la integral está en términos de dt entonces x es cte:

$$y_p = senx \int_{x_0}^{x} sent\ dt - \cos x \int_{x_0}^{x} \frac{1 - cos^2t}{cost} dt$$

$$y_p = senx\left(-cost\left|_{x_0}^{x}\right.\right) - \cos x\left[\int_{x_0}^{x}\frac{1}{cost}dt - \int_{x_0}^{x} costdt\right]$$

$$y_p = senx[-cosx + cosx_0] - cosx\left[ln|sect + tgt|_{x_0}^{x} - sent|_{x_0}^{x}\right]$$

El x_0 se toma con el valor de cero $x_0 = 0$

$$y_p = senx(-cosx + 1) - cosx[ln|secx + tgx| - ln|secx_0 + tgx_0|] - (senx - senx_0)$$

$$y_p = -senxcosx + senx - cosx([ln|sexcx + tgx| - ln|1 + 0|] - senx + 0)$$

$$y_p = -senxcosx + senx - cosx(ln|secx + tgx|) + cosx(ln|1|) + sexcosx$$

$$y_p = -cosx(ln|secx + tgx|) + cosx(0) + senx$$

$$y_p = -cosx(ln|secx + tgx|) + senx$$

Como la solución general es:

$$y = c_1cosx + c_2senx - cosx(ln|secx + tgx|) + senx$$

Ejercicio 7.1.2

$$y'' + y = \frac{1}{cosx}$$

1.- La solución general de la ecuación es:

$$y_G = y_h + y_p$$

2.- Resuelvo o hallo la solución de la homogénea.

$$y'' + y = 0$$

$(D^2 + 1)y = 0$

$(\alpha^2 + 1) = 0$

Al resolver esta ecuación el valor de alfa resulta con dos raíces imaginarias:

$$\alpha^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0 \pm i \quad \rightarrow \quad a = 0 \quad \rightarrow \quad b = 1$$

$$Y_h = c_1 e^{ax} cosbx + c_2 e^{ax} senbx$$

$$y_h = c_1 cosx + c_2 senx$$

$$\boxed{\text{Solución de la homogénea}}$$

3. Hallamos la solución particular

$$\begin{matrix} y_1(x) = cosx \\ y_2(x) = senx \\ h(x) = \dfrac{1}{cosx} \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} y_1(t) = cost \\ y_2(t) = sent \\ h(t) = \dfrac{1}{cost} \end{matrix}$$

Calculamos el:

$$W[y_1(t), y_2(t)] = \begin{vmatrix} cost & sent \\ -sent & cost \end{vmatrix} = cos^2 t + sen^2 t = 1$$

Para hallar la solución particular se utiliza la fórmula, reemplazando los valores se tiene:

$$Y_p = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t) y_2(x) - y_1(x) y_2(t)}{w[y_1(t), y_2(t)]} h(t) dt$$

$$Y_p = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{costsenx - cosxsent}{1}\right)\frac{1}{cost}dt$$

$$Y_p = \int_{x_0}^{x} senxdt - \int_{x_0}^{x} \frac{cosxsent}{cost}dt$$

$$Y_p = senx\int_{x_0}^{x} dt - cosx\int_{x_0}^{x} \frac{sent}{cost}dt$$

$$Y_p = senx[t]_{x_0}^{x} - cosx\int_{x_0}^{x} \frac{d(cost)}{cost}dt$$

Si :

$$\int \frac{du}{u} = ln|u|$$

$$Y_p = senx[x - x_0] + cosx\left[ln|cost|_{x_0}^{x}\right]$$

$$Y_p = xsenx + cosx[ln|cosx| - ln|cosx_0|]$$

$$Y_p = xsenx + cosx[ln|cox| - ln|1|]$$

$$Y_p = xsenx + cosx[ln|cosx| - 0]$$

$$y_p = xsenx + cosxln|cosx|$$

Además se considera que en la solución particular, las constantes no existen:

$$y = y_h + y_p$$

Solución General:

$$y_G = c_1 cosx + c_2 senx + xsenx + cosxln|cosx|$$

Se recuerda que también se puede utilizar la fórmula como:

$$y_p = y_2(x) \int \frac{y_1(x)h(x)}{w[y_1(x), y_2(x)]} dx - y_1(x) \int \frac{y_2(x)h(x)}{w[y_1(x), y_2(x)]} dx$$

Reemplazando :

$$y_p = senx \int \frac{cosx}{1} * \frac{1}{cosx} dx - cosx \int \frac{senx}{1} * \frac{1}{cosx} dx$$

$$y_p = senx \int dx - cosx \int \frac{senx}{cosx} dx$$

$$y_p = xsenx + cosxln|cosx|$$

Ejercicios propuestos sección 7

1. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+4y=x^2$ Resp. $y(x)=C_1x^2+C_2x+\frac{1}{4}x^2\ln\mid x\mid$

2. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=\text{sen}\,(x)$ Resp. $y(x)=C_1x+C_2x^{-1}+\frac{1}{2}\sin\,(x)-\frac{1}{2}x\cos\,(x)$

3. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+5x\frac{dy}{dx}+4y=e^x$ Resp. $y(x)=C_1x^{-4}+C_2x^{-1}+\frac{1}{24}e^x$

4. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=x^3$ Resp. $y(x)=C_1x+C_2x^2+\frac{1}{4}x^3\ln\mid x\mid-\frac{1}{16}x^3$

5. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+2y=\ln\,(x)$ Resp. $y(x)=C_1x^{-2}+C_2x^{-1}+\frac{1}{4}x^2\ln\,(x)-\frac{1}{16}x^2$

6. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+y=x^2\cos\,(x)$ Resp. $y(x)=C_1x^{-1}+C_2x^{-1}\ln\mid x\mid$
$+\frac{1}{2}x^2\cos\,(x)-\frac{1}{2}x^2\text{sen}\,(x)$

BIBLIOGRAFÍA

[1] M. Spiegel, "Murray r spiegel," p. 662, 1983.

[2] Dennis Zill, "Ecuaciones-Diferenciales-7-Edicion-Con-Valores-en-La-Frontera-Denis-Zill.pdf." Cengage Learning, pp. 0–599, 2009.

[3] M. V. Ortega, *Ecuaciones Diferenciales Y Aplicaciones*, vol. 53, no. 9. 2019.

[4] I. C. Jover and E. F. López, *Ecuaciones diferenciales*. Pearson, 2011.

[5] P. L. D. G. L. H. Blanchard, "Ecuaciones Diferenciales," *Thomson*, pp. 7823–7830, 1999.

[6] Carmen Chicone, *Ordinary Differential Equations With Applications, 2nd Edition*, vol. 21. 2024.

[8] A. K. M. K. G. Makarenko, "Problemas de ecuaciones diferenciales Ordinarias." 1984.

[9] E. Nº, "Ordinarias De Primer Orden Con Condiciones," 2003.

[10] Y. A. W. J. P. I. ÇENGEL, *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias*, vol. 11, no. 1. 2019.

[11] E. D. R. P. E. B. R. E. B. V, "Ecuaciones diferenciales," *Catálogo Editor.*, pp. 111–130, 2021.

[12] C. Diferenciales, "E CUACIONES," 2004.

[13] Lidia Castro Cepeda, "ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS, TEORÍA Y EJERCICIOS RESUELTOS," *Cide*, 2022.

[14] L. M. Moya, "Ecuaciones diferenciales Ordinarias Técnicas de resolución," *2020*.

[15] C. M. Giordano, "Ecuaciones diferenciales parciales," *2017*.

[16] E. C. Diferenciales, *ECUACIONES DIFERENCIALES*. .

[17] *M´ETODOS CLASICOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS*. .

[18] E. Kreyszig, "Matemáticas Avanzadas para Ingeniería." Limusa Wiley, p. 721, 2003.

[19] R. K. N. E. B. S. A. D. Snider, "Differential equations," *Lect. Notes Control Inf.*

Sci., vol. 153, pp. 19–61, 2009.

[20] M. López and I. Acero, *Ecuaciones diferenciales : teoría y problemas*. 2007.

[21] A. F. Botero, *M atemáticas especiales para ingenieros*. 2020.

[22] J. Bravo, *ECUACIONES DIFERENCIALES*. 2014.

[23] S. Holzner, *Differential Equation for Dummes*. 2008.

[24] P. B. R. L. D. G. R. Hall, "The Boston University," *Cengage Learn.*, p. 859, 2012.

[25] A. D. Polyanin, V. G. Sorokin, and A. I. Zhurov, *Delay Ordinary and Partial Differential Equations*. 2023.

[26] H. Logemann and E. P. Ryan, *Mathematics Series Ordinary Differential Equations Analysis, Qualitative Theory and Control*. 2014.

[27] R. Adolph, *Ordinary Differential Equations and Applications*. 2024.

[28] M. L. J. P. B. Abell, *Differential Equations With Mathematica*, vol. 11, no. 1. 2019.

[29] G. S. Marshall, "A First Course in Differential Equations with Modeling Applications," pp. 43–56, 2024.

[30] Joel Ibarra Escutia, *Ecuaciones diferenciales*. 2015.

[31] D. G. Zill, *ECUACIONES DIFERENCIALES con aplicaciones de modelado*. 2015.

[32] D. G. Zill and W. S. Wright, *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valor en la frontera*. 2015.